ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 9 MAI 1938.

PRÉSIDENCE DE M. AUGUSTE BÉHAL.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **Vito Volterra** s'exprime en ces termes :

Le Comité International des Poids et Mesures a l'honneur de faire hommage à l'Académie du Volume XVIII, 2e série, des *Procès-Verbaux de ses séances*.

Ce volume contient, non seulement le compte rendu de la session du Comité International tenue en 1937, mais aussi les procès-verbaux des séances du Sous-Comité technique d'Électricité, du Comité consultatif d'Électricité et du Comité consultatif de Photométrie, qui avaient siégé peu auparavant, et dont le Comité International a adopté les propositions et conclusions.

Des valeurs provisoires, comportant déjà cinq décimales, ont été fixées, des rapports des Unités électriques internationales moyennes aux Unités absolues qui leur seront substituées en 1940; les écarts des unités particulières à chaque pays par rapport aux unités internationales moyennes avaient été préalablement déterminés par le Bureau International des Poids et Mesures.

Une définition de l'unité d'intensité lumineuse fondée sur la brillance du corps noir à la température du point de solidification du platine a été adoptée; et l'unité elle-même a pu être unifiée, entre tous les pays représentés, sur une valeur extrêmement voisine de la bougie actuelle (inférieure de 2 pour 100 environ); cette *bougie nouvelle*, tel est son nom, devra entrer en vigueur au 1er janvier 1940, après approbation de la Conférence générale des Poids et Mesures qui se tiendra l'année prochaine. Le Bureau International a obtenu l'autorisation de constituer un laboratoire de pho-

tométrie pour la comparaison des étalons représentatifs des divers pays.

Le Comité International a décidé la création d'un Comité consultatif de Thermométrie destiné à le renseigner sur toutes les questions touchant à la mesure précise des températures. Le D[r] Keesom en a reçu la présidence. Notre confrère M. Charles Fabry a accepté la présidence du Comité consultatif de Photométrie nouvellement créé, et le professeur Kennelly a été élu Président du Comité consultatif d'Électricité.

De nombreuses annexes suivent ces divers procès-verbaux; les unes traitent certaines questions techniques abordées par le Comité International lui-même; les autres, en plus grand nombre, sont des rapports originaux des spécialistes les plus qualifiés des grands laboratoires nationaux de tous les pays, concernant ces importantes questions des unités électriques et photométriques.

L'admirable organisation des différentes sessions est due au Directeur, M. Albert Pérard, qui continue à développer avec succès l'activité du Bureau International des Poids et Mesures.

M. **A. Chevalier** dépose sur le bureau les fascicules XVIII et XIX du *Bulletin du Laboratoire maritime de Dinard*, dont l'un contient le compte rendu de l'*Inauguration de la salle* Charcot *au Musée de la mer*.

ÉLECTIONS.

Par la majorité absolue des suffrages, M. **E. Roubaud** est élu Membre de la Quatrième section du Comité de la France d'Outre-Mer en remplacement de M. *F. Mesnil* décédé.

NOMINATIONS.

M. **G. Claude** est désigné pour représenter l'Académie, avec les délégués précédemment nommés, au *X[e] Congrès international de Chimie*, à Rome.

M. **Ch. Barrois** est désigné à nouveau à la *National Academy of Sciences* comme Membre du *Board of Directors* du Fonds *Ch. D. Walcott.*

M. **H. Colin** est désigné pour représenter l'Académie à la cérémonie du Centenaire de la *Translation des cendres* de J. B. A. de Montyon, à Saint-Julien-le-Pauvre, le 26 mai 1938.

PRÉSENTATIONS.

Dans la formation d'une liste de candidats à la Chaire de Mathématiques et Mécanique vacante au Collège de France, pour la première ligne M. *Szolem Mandelbrojt* obtient 26 suffrages contre 21 à M. *Jean Leray;* il y a 1 bulletin nul.

Pour la seconde ligne M. *Jean Leray* obtient 40 suffrages; il y a 2 bulletins blancs.

En conséquence la liste présentée à M. le Ministre de l'Éducation Nationale comprendra :

En première ligne........... M. **Szolem Mandelbrojt.**
En seconde ligne........... M. **Jean Leray.**

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Topobibliographie de la France*, par Maurice Duportet avec la collaboration de : Henri Fougerol, J. Joussin du Rieu, René Vallet. *Allier, Bulletins et Revues.* Préface de M. Joseph Viple.

2° *La sécurité aérienne. Animaux et machines*, par Étienne Œhmichen (présenté par M. J. Tilho).

3° *Propulseurs et amortisseurs de chocs chez les animaux*, par Étienne Œhmichen (présenté par M. J. Tilho).

LOGIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur un problème d'analyse mécanique abstraite* [1] *: la théorie de la réduction résulte de fonctions mécaniques.* Note de M. **Louis Couffignal**, présentée par M. Maurice d'Ocagne.

Nous avons appelé *fonction mécanique* (antonyme *fonction intellectuelle*) l'une quelconque des opérations qui peuvent être exécutées par des machines; nous qualifierons de *mécanique* (ant. *intellectuel*) le résultat de telles opérations.

Nous nous proposons de montrer que certaines théories de la logique des mathématiques sont mécaniques, et non intellectuelles.

Représentons par 0 et 1 (faux et vrai) la *valeur logique* d'une proposition. Appelons *système propositionnel* S_n *d'ordre* n un ensemble ordonné de n propositions p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; *combinaison logique* de S_n, le symbole formé par les valeurs logiques des p_i rangées dans l'ordre de ces p_i.

Si l'on considère 0 et 1 comme des chiffres, une combinaison logique représente, dans le système binaire, un entier de n chiffres donc : *un système proportionnel d'ordre n admet au plus* 2^n *combinaisons logiques;* nous dirons qu'il est général ou particulier, selon qu'il en admet 2^n ou moins de 2^n.

Appelons *fonction propositionnelle d'ordre* n, une proposition dont la valeur logique est déterminée par les valeurs logiques des n propositions p_i; fonction *générale* (ou *particulière*), une fonction propositionnelle dépendant d'un système général (ou particulier); *indice logique* d'une fonction propositionnelle, le symbole formé par les valeurs logiques correspondant aux diverses combinaisons logiques du système S_n, rangées dans l'ordre naturel de ces combinaisons, une étoile marquant, pour les fonctions particulières, la place des valeurs logiques qui correspondraient aux combinaisons logiques qui ne possèdent pas le système S_n; *classe de fonctions propositionnelles*, l'ensemble des fonctions d'un même indice (nous la représenterons par cet indice logique écrit entre parenthèses); fonctions *équivalentes*, des fonctions de même classe; *opération propositionnelle* (notée par le même symbole qu'une classe), l'opération qui consiste à construire l'indice logique de cette classe.

---

[1] Pour le sens de ce terme voir L. Couffignal, *Sur l'analyse mécanique* (*Thèse*, art. 37, p. 39) et *Bull. Astr.*, **10**, 1937, p. 177.

L'indice logique d'une fonction générale représente, dans le système binaire, un entier de 2^n chiffres. Donc une *fonction propositionnelle d'ordre n admet au plus 2^{2^n} indices logiques, c'est-à-dire 2^{2^n} significations distinctes.*

Appelons *constantes propositionnelles*, les fonctions propositionnelles de valeur logique invariable (elles se répartissent en deux classes, notées 0 et 1); *opérations propositionnelles élémentaires*, les opérations (10), (1001), (0001), (0111), (1011), (1101) (²); *polynome propositionnel*, le résultat d'une combinaison des opérations élémentaires; *degré* d'un polynome propositionnel, le nombre des variables, différentes ou non, qu'il contient; *invariant propositionnel* (³), un polynome propositionnel équivalent à 1.

La logistique étudie le problème suivant : *coordonner dans une théorie déductive* (appelée, par Whitehead et Russell, *théorie de la déduction*) les *invariants propositionnels.*

Tout invariant propositionnel d'ordre n résulte : soit d'un polynome propositionnel de classe 0 par l'opération (10), soit, par une opération élémentaire d'ordre 2, de deux polynomes propositionnels, p_h, p_k, qui contiennent, dans leur ensemble, n variables distinctes; dans ce dernier, ou bien p est un invariant propositionnel d'ordre 2, et p_h et p_k des polynomes propositionnels d'une classe quelconque de leur ordre, ou bien p est une fonction particulière p' des classes (1001), (0001), (0111), (1011), (1101) p_h et p_k appartenant alors à des classes de leur ordre déterminées par la définition de p'. Donc *pour pouvoir déterminer tous les invariants propositionnels d'ordre n, il faut construire une théorie complète des polynomes propositionnels de tous les ordres de à n.*

Nous admettons qu'il suffit (pour des raisons motivées par l'emploi usuel des polynomes propositionnels) de conserver dans la théorie, parmi les polynomes p_k fonctions des variables $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_k}$, choisies parmi les p_i, celui dont le degré est minimum. La construction d'une théorie des polynomes propositionnels peut dès lors s'effectuer comme suit :

1° Chaque polynome est représenté par une carte sur laquelle sont

---

(²) Ces opérations ne sont autres que la *négation, l'équivalence de deux propositions, la multiplication logique, l'addition logique, l'implication et la réciproque de cette dernière.*

(³) *Propositions de logique de première espèce* de Whitehead et Russell (*Principia Mathematica*) ou *identités propositionnelles* de Zaremba (*Mémor. Sc. math.*, fasc. XV).

inscrits, dans le système binaire, au moyen de perforations, un numéro d'ordre (ou *rang*) de ce polynome, le degré de ce dernier, son indice logique, les rangs des polynomes et la nature de l'opération dont il résulte.

2° Une machine électrique exécute les opérations suivantes : *a*, groupement des cartes par paires, de manière que toutes les cartes d'un degré *h* coagissent avec chaque carte d'un degré *k*; *b*, pour chaque paire de cartes; totalisation des degrés; comparaison des indices et calcul de l'indice-résultat pour chacune des opérations élémentaires d'ordre 2 (définie par la position d'un commutateur multiple), application de l'opération (10) à chaque indice-résultat; *c*, impression des cartes-résultats.

3° Dès que les résultats relatifs à toutes les cartes de deux degrés *h* et *k* sont obtenus : *a*, les indices des cartes-résultats sont comparés à deux des cartes déjà établies, et les cartes-résultats d'indice nouveau seules retenues; *b*, ces dernières sont numérotées.

Les opérations 2° *b* et 3° *a* peuvent être exécutées par les dispositifs que nous avons déjà décrits ([1]), les autres sont déjà exécutées mécaniquement, dans le système décimal, par les machines à statistique : *la théorie des polynomes propositionnels est donc une théorie mécanique*.

GÉOMÉTRIE. — *L'élément infinitésimal d'ordre n d'une courbe gauche.* Note de M. **R. de Misès**, présentée par M. Maurice d'Ocagne.

L'élément infinitésimal de l'ordre n d'une courbe *plane* $(n > 1)$ est déterminé par la tangente, le centre de courbure M_1 et les centres de courbure $M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$ des développées successives. Dans le polygone orthogonal formé par le point P de la courbe et les $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ successifs chaque M_ν est le centre de courbure de la courbe $(M_{\nu-1})$ décrite par $M_{\nu-1}$. La direction de $M_{2\nu-1}M_{2\nu}$ est celle de la tangente de (P) et $M_{2\nu}M_{2\nu+1}$ est parallèle à la normale de (P) en P. Si nous désignons par φ' la dérivée de φ par rapport à l'arc s de la courbe donnée et par ρ son rayon de courbure en P, les distances $\rho_\nu = \overline{M_{\nu-1}M_\nu}$ sont données par

$$(1)\qquad \rho_{\nu+1} = \rho\rho'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots; \; \rho_1 = \overline{PM_1} = \rho).$$

Dans le cas d'une courbe *gauche*, le procédé analogue ne mène pas

([1]) *Thèse*, Chap. V, Sect. B.

immédiatement au résultat voulu. On peut envisager l'axe de courbure a_1 de (P), droite passant par le centre de courbure N_1 et parallèle à la binormale. Cet axe engendre une surface développable dont l'arête de rebroussement, décrite par un certain point N_2 de a_1, admet comme normale principale une parallèle à la normale principale de la courbe originale (P). Ainsi l'axe de courbure a_2 de (N_2) est parallèle à la tangente de (P) et si l'on continue de cette façon, on obtient une suite d'axes successifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ qui sont alternativement parallèles à la binormale et à la tangente de la courbe donnée. Sur tout axe a_ν il y a deux points remarquables $N_{2\nu-1}$ et $N_{2\nu}$, pieds des perpendiculaires communes issues de $a_{\nu-1}$ et $a_{\nu+1}$ respectivement. Dans le polygone orthogonal $PN_1N_2N_3\ldots$ les côtés $N_{4\nu+1}N_{4\nu+2}$ sont parallèles à la binormale, $N_{4\nu+3}N_{4\nu+4}$ parallèles à la tangente, enfin $N_{4\nu}N_{4\nu+1}$ et $N_{4\nu+2}N_{4\nu+3}$ parallèles à la normale principale de (P).

On pourrait penser que l'ensemble des axes $a_1, a_2, a_3, \ldots$ joue le même rôle dans le cas d'une courbe gauche que les centres de courbure M_1, $M_2, M_3, \ldots$ dans le cas d'une courbe plane. Mais il n'en est pas ainsi. Si nous désignons par ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de (P), les distances successives $\sigma_\nu = \overline{N_{\nu-1}N_\nu}$ sont définies par les relations

$$(2)\quad \begin{cases} \sigma_{4\nu+1} = -\sigma_{4\nu-1} + \rho\sigma'_{4\nu}, & \sigma_{4\nu+3} = -\sigma_{4+1} - \tau\sigma'_{4\nu+2}, \\ \sigma_{4\nu+2} = \tau\sigma'_{4\nu+1}, \quad \sigma_{4\nu+4} = -\rho\sigma'_{4\nu+3}, & \sigma_1 = \overline{PN_1} = \rho. \end{cases}$$

On voit ici que toute expression σ_ν comporte la dérivation de la précédente. Ainsi les $(n-1)$ distances qui déterminent les points N_1, $N_2, \ldots, N_{n-1}$ dépendent de ρ et τ et des dérivées de ρ jusqu'à l'ordre $n-2$ et celles de τ jusqu'à l'ordre $n-3$. Pour fixer l'élément d'ordre $n (n > 2)$ il faudrait connaître toutes ces dérivées, c'est-à-dire $\rho, \rho', \ldots, \rho^{(n-2)}$ et $\tau, \tau', \ldots, \tau^{(n-3)}$, mais il n'est pas possible de déterminer ces $2n-3$ inconnues alors qu'on ne dispose que de $n-1$ équations.

On peut compléter la détermination de l'élément d'ordre n en ajoutant au polygone $PN_1N_2\ldots N_{n-1}$ le polygone $PM_1M_2\ldots M_{n-1}$ défini conformément à (1) pour la courbe plane qui résulte de l'application sur le plan osculateur de la surface développable engendré par les tangentes de (P). En effet, dans cette application, le rayon de courbure de la courbe gauche se transforme en rayon de courbure de la courbe plane. Les points M_1 et N_1 coïncident. L'ensemble des points $PM_1M_2\ldots M_{n-1}$ donne, d'après (1), les valeurs $\rho, \rho'\ldots\rho^{(n-1)}$ et en en rapprochant le polygone $PN_1N_2\ldots N_{-1}$, on obtient, suivant (2), les valeurs $\tau, \tau', \ldots \tau^{(n-3)}$. Ainsi, pour toute courbe

gauche, les deux polynomes $PM_1M_2\ldots M_{n-1}$ et $PN_1N_2\ldots N_{n-1}$ forment une représentation géométrique complète des propriétés intrinsèques de l'élément infinitésimal d'ordre n.

GÉOMÉTRIE. — *Sur l'hypercongruence de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions.* Note de M. **Husni Hamid**, présentée par M. Maurice d'Ocagne.

Nous avons signalé [1] quelques formules générales sur les variétés réglées d'ordre supérieur.

Soient

$$(1)\quad x_i=\xi_i(u_1, u_2, \ldots, u_p)+w\lambda_i(u_1, u_2, \ldots, u_p) \qquad (i=1, 2, \ldots, n+1, \Sigma\lambda_i^2=1)$$

les équations de la droite mobile de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions, engendrant la variété R_{n+1}^p. On peut appeler cette variété *congruence à p dimensions.* Appelons *hypercongruence* la variété $p=n$.

I. L'élément linéaire de l'hypercongruence étant ds, on a

$$(2)\qquad ds^2=\Sigma\, d\xi_i^2+\ldots.$$

Annulons les dérivées de ds^2 par rapport à w et à dw. Il vient

$$(3)\qquad \Sigma\, d\xi_i\, d\lambda_i+w\Sigma\, d\lambda_i^2+dw\Sigma\lambda_i\, d\xi_i=0,$$

$$(4)\qquad \Sigma\,\lambda_i\, d\xi_i+w\Sigma\lambda_i\, d\lambda_i+dw\Sigma\lambda_i^2=0;$$

ds est alors la plus courte distance $d\sigma$ de deux génératrices infiniment voisines, de sorte que

$$(5)\qquad d\sigma^2=\Sigma\, d\xi_i^2+w\Sigma\, d\xi_i\, d\lambda_i+dw\Sigma\lambda_i\, d\xi_i.$$

Les équations (3), (4), (5) donnent

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma\, d\xi_i^2-d\sigma^2 & \Sigma\, d\xi_i\, d\lambda_i & \Sigma\lambda_i\, d\xi_i \\ \Sigma\, d\xi_i\, d\lambda_i & \Sigma\, d\lambda_i^2 & \Sigma\lambda_i\, d\lambda_i \\ \Sigma\lambda_i\, d\xi_i & \Sigma\lambda_i\, d\lambda_i & \Sigma\lambda_i^2 \end{vmatrix}=0.$$

En tenant compte de

$$\Sigma\lambda_i\, d\lambda_i=0, \qquad \Sigma\lambda_i^2=1,$$

si l'on tire $d\sigma^2$ de (6) on trouve, pour cette quantité, un rapport dont le

[1] Husni Hamid, *Comptes rendus*, **200**, 1935, p. 1911.

numérateur est le carré d'une matrice. Il en résulte que

(7) $$P = \frac{d\sigma}{\sqrt{\Sigma\, d\lambda_i^2}} = \frac{\begin{vmatrix} d\xi_1 & \dots & d\xi_{n+1} \\ d\lambda_2 & \dots & d\lambda_{n+1} \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n+1} \end{vmatrix}}{\Sigma\, d\lambda_i^2},$$

en choisissant la valeur positive.

Multiplions, haut et bas, par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n+1} \end{vmatrix} = \Delta,$$

alors

$$P = \frac{\begin{vmatrix} b_{11}\, du_1^2 + \dots + b_{1n}\, du_n^2 & \dots & b_{2n}\, du_1^2 + \dots + b_{2n}\, du_n^2 \\ a_{11}\, du_1^2 + \dots + a_{1n}\, du_n^2 & \dots & a_{2n}\, du_1^2 + \dots + a_{2n}\, du_n^2 \end{vmatrix}}{\Delta(a_{11}\, du_1^2 + \dots)} = \frac{c_{11}\, du_1^2 + \dots}{a_{11}\, du_1^2 + \dots}$$

avec

$$b_{jk} = \sum \frac{\partial\lambda_i}{\partial u_j}\frac{\partial\xi_i}{\partial u_k}, \qquad a_{jk} = \sum \frac{\partial\lambda_i}{\partial u_j}\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_k} \qquad (b_{jk} \neq b_{kj},\ a_{jk} \neq a_{kj})$$

et

$$c_{11} = \frac{b_{11}a_{21} - b_{21}a_{22}}{\Delta}, \qquad \dots.$$

II. Déterminons les foyers d'abscisses $w_1, w_2, \dots, w_n$. Ils satisfont aux conditions

(8) $$\frac{dx_1}{\lambda_1} = \frac{dx_2}{\lambda_2} = \dots = \frac{dx_{n+1}}{\lambda_{n+1}} = d\rho,$$

d'où

(9) $$\left\| \frac{\partial\xi_i}{\partial u_1} + w_1\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_1} \quad \frac{\partial\xi_i}{\partial u_2} + w\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_2} \quad \dots \quad \lambda_i \right\| = 0.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par le déterminant

$$\left\| \frac{\partial\lambda_i}{\partial u_1} \quad \frac{\partial\lambda_i}{\partial u_2} \quad \dots \quad \lambda_i \right\| \neq 0,$$

il vient

$$\| b_{j1} + wa_{j1} \quad b_{j1} + wa_{12} \quad \dots \| = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Lorsque $b_{jk} = b_{kj}$, les foyers sont confondus avec les points limites. D'autre part, si w_j prend la valeur

$$w_j = \frac{-\partial\xi_1}{\partial u_j} : \frac{\partial\lambda_1}{\partial u_j} = \dots = \frac{-\partial\xi_{n+1}}{\partial u_j} : \frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial u_j},$$

on obtient un cas étudié par Guichard [2].

---

[2] *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, 14, 1897, p. 467.

III. Soit la variété $n+1=4$. L'équation (9) est du troisième degré. Si, en particulier, on considère les droites de cette variété situées dans l'hyperplan $x_4=0$ ($\xi_4=0$, $\lambda_4=0$), ces droites constituent un complexe dans l'espace à trois dimensions; elles ont comme équations

$$\frac{x_1-\xi_1}{\lambda_1}=\frac{x_2-\xi_2}{\lambda_2}=\frac{x_3-\xi_3}{\lambda_3};$$

de plus

$$\left\| \frac{\partial\lambda_1}{\partial u_j} \quad \frac{\partial\lambda_2}{\partial u_j} \quad \frac{\partial\lambda_3}{\partial u_j} \right\| = 0 \qquad (j=1, 2, 3),$$

c'est-à-dire qu'un des points limites, un des foyers est à l'infini; le paramètre devient

$$P=\frac{c_{11}\,du_1^2+c_{22}\,du_2^2+2c_{12}\,du_1\,du_2+2c_{13}\,du_1\,du_3+2c_{23}\,du_2\,du_3}{a_{11}\,du_1^2+2a_{12}\,du_1\,du_2+a_{22}\,du_2^2}.$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur des suites de facteurs multiplement monotones.* Note (¹) de M. **Béla de Sz. Nagy**, présentée par M. Gaston Julia.

Dans une Note (²) désignée dans ce qui suit par I, j'ai considéré des propriétés extrémales des séries de Fourier transformées par une suite de facteurs absolument monotone. Je viens de remarquer que les théorèmes donnés restent valables lorsqu'on ne suppose sur la suite des facteurs qu'un certain ordre *fini* de monotonie.

Soit $f(x)$, *comme dans* I, *une fonction périodique de période* 2π, *bornée en module par* 1, *intégrable et ayant une série de Fourier de la forme*

$$(1) \qquad \sum_{k=m}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (m\geq 1).$$

Soit $\lambda(m)$, $\lambda(m+1)$, $\lambda(m+2)$, ... *une suite de nombres réels non négatifs, triplement monotone et tendant vers zéro. Alors*

$$(2) \qquad \sum_{k=m}^{\infty}\lambda(k)\,(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

est la série de Fourier d'une fonction continue $f^*(x)$ *satisfaisant à*

(¹) Séance du 2 mai 1938.

(²) *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 868.

l'inégalité

(3) $$|f^*(x)| \leqq (\operatorname{sgn} \cos mx)^*_{x=0} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \lambda(2\nu m + m).$$

Soit $\mu(m), \mu(m+1), \mu(m+2), \ldots$ *une suite de nombres réels non négatifs, doublement monotone, tendant vers* o *et telle que* $\sum_{k=m}^{\infty} k^{-1} \mu(k)$ *converge. Alors*

(4) $$\sum_{k=m}^{\infty} \mu(k)(b_k \cos kx - a_k \sin kx)$$

est la série de Fourier d'une fonction continue $\overline{f^*(x)}$, *satisfaisant à l'inégalité*

(5) $$|\overline{f^*(x)}| \leqq \overline{(\operatorname{sgn} \sin mx)}^*_{x=0} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} \mu(2\nu m + m).$$

Le cas des facteurs identiquement nuls étant exclu, si $f(x)$ *n'est équivalent à aucune fonction de la forme* $\varepsilon \operatorname{sgn} \cos(mx + \delta)$ ($|\varepsilon| = 1$, δ *réel*), *alors les signes* $\leqq$ *dans* (3) *et* (5) *peuvent être remplacés par* $<$.

Observons d'abord que les suites (avec j arbitraire fixe)

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \lambda(2\nu m + m + n) \quad \text{et} \quad d_n^j = \sum_{\nu=0}^{j} \mu(2\nu m + m + n)$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sont doublement monotones et tendant vers o, ce qui entraîne que les séries

$$c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos ny \quad \text{et} \quad d_0^j + 2\sum_{n=1}^{\infty} d_j^n \cos ny$$

tendent [(au moins pour $y \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$)] respectivement vers des fonctions $\Phi(y)$, $\Psi^j(y)$ *positives* (ayant un nombre fini de zéros au plus).

Pour établir (3) et (5), partons, comme en 1, des formules

$$f^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \varphi(y)\, dy \quad \text{et} \quad \overline{f^*(x)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \Psi(y)\, dy,$$

où

$$\varphi(y) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{r=1}^{m-1} A_r \cos ry + \sum_{k=m}^{\infty} \lambda(k) \cos ky$$

et

$$\Psi(y)=\sum_{r=1}^{m-1} B_r \sin r y+\sum_{k=m}^{\infty} \mu(k) \sin k y.$$

En posant en particulier

$$A_r=c_{m-r}+c_{m+r}, \qquad B_r=\lim_{j\to\infty}(d^j_{m-r}-d^j_{m+r}) \qquad (0\leqq r\leqq m-1),$$

on peut montrer que

$$\varphi(y)=\cos m y\, \Phi(y) \quad \text{et que} \quad \Psi(y)=\lim_{j\to\infty}[\sin m y\, \Psi^j(y)],$$

d'où l'on voit que

$$|\varphi(y)|=(\operatorname{sgn}\cos m y)\varphi(y), \qquad |\Psi(y)|=(\operatorname{sgn}\sin m y)\Psi(y).$$

La démonstration s'achève comme en I.

A titre d'exemples signalons ici les inégalités

$$\left|\sum_{k=m}^{n} r^k(a_k\cos k x+b_k\sin k x)\right|\leqq\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}r^{(2\nu+1)m} \qquad \left\{0\leqq r\leqq\frac{1}{3},\ N=\left[\frac{n-m}{2m}\right]\right\};$$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} r^k(b_k\cos k x-a_k\sin k x)\right|\leqq\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{1}{2\nu+1}r^{(2\nu+1)m} \qquad \left\{0\leqq r\leqq\frac{1}{2},\ N=\left[\frac{n-m}{2m}\right]\right\};$$

$$|\sigma_n^\alpha[f(x)]|\leqq\{\sigma_n^\alpha[\operatorname{sgn}\cos m x]\}_{x=0} \qquad (\alpha\geqq 2);$$

$$|\overline{\sigma_n^\alpha[f(x)]}|\leqq\{\overline{\sigma_n^\alpha[\operatorname{sgn}\sin m x]}\}_{x=0} \qquad (\alpha\geqq 1);$$

$\sigma_n^\alpha[f(x)]$ désignant la moyenne (C, α) d'indice n de la série de Fourier de $f(x)$.

La même méthode peut être appliquée au problème des meilleures approximations trigonométriques ([3]). Remarquons aussi que tous ces théorèmes peuvent être généralisés au cas des *fonctions presque périodiques* ou au cas des *intégrales trigonométriques*, etc.

([3]) Cf. J. Favard, *Bulletin des Sc. Math.*, 61, 1937, p. 209 et 243.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques transformations de la série de Liouville-Neumann.* Note [1] de M. **Alexandre Ostrowski**, présentée par M. Gaston Julia.

1. Le résolvant de l'équation intégrale $\varphi(x) - \int \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x)$ est donné par le développement de Liouville-Neumann

$$\mathcal{K}^*(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{K}_\nu(x, y), \tag{1}$$

où $\mathcal{K}_0 \equiv 1$ et $\mathcal{K}_\nu(\nu = 1, 2, \ldots)$ désignent le noyau itéré d'ordre ν, si (1) converge uniformément. Dans ce qui suit nous écrirons les expressions $\mathrm{T}(x, y) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \mathcal{K}_\nu(x, y)$ comme les polynomes symboliques $t(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$. Si le polynome symbolique $t_1(z) = \sum_{\nu=0}^{m} a'_\nu z^\nu$ correspond à

$$\mathrm{T}_1(x, y) = \sum_{\nu=0}^{m} a'_\nu \mathcal{K}_\nu(x, y),$$

le produit $t(z)t_1(z) = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu a'_\mu z^{\nu+\mu}$ correspond à l'expression

$$\int \mathrm{T}(x, z)\,\mathrm{T}_1(z, y)\,dz.$$

Nous désignons le polynome $1 + z + \ldots + z^{n-1}$ par $s_n(z)$.

Le calcul direct de la somme $s_n(z)$ des n premiers membres de (1) nécessite $n - 2$ intégrations. Dans notre Note du 18 août 1936 [2] nous

---

[1] Séance du 2 mai 1938.

[2] *Comptes rendus,* 203, 1936, p. 602. Après la publication de cette Note nous avons trouvé dans une communication de M. Günther Schulz (*Iterative Berechnung der reziproken Matrix*, n° 9 des *Kleine Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik der Universität Berlin; Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 13, 1933, p. 57-59) un procédé très intéressant du calcul du réciproque d'une matrice, qui présente le caractère de convergence *quadratique* et qui, suffisamment développé, conduirait à un résultat analogue au nôtre.

avons réduit considérablement le nombre d'intégrations nécessaires pour le calcul d'une suite particulière des $s_n(z)$, savoir $s_{2^\nu}(z)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$).

2. Depuis, nous avons trouvé une transformation de (1), convergeant plus rapidement. A cet effet nous utilisons la formule

$$(2) \qquad s_{3^n}(z) = \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 + z^{3^\nu} + z^{2.3^\nu}).$$

En utilisant (2) on calcule successivement les $2n - 1$ puissances symboliques z^{3^ν} ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$), $z^{2.3^\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) et les expressions $s^{3^\nu}(z)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), ce qui nécessite $3n - 2$ intégrations. Par trois intégrations en plus on passe de $s_{3^n}(z)$ à $s_{3^{n+1}}(z)$.

Or, en calculant successivement $s_{2^\nu}(z)$ et en effectuant $6k - 2$ intégrations on obtient $s_{2^{3k}}(z) = s_{8^k}(z)$, tandis qu'en appliquant la formule (2) on parvient par le même nombre d'intégrations à $s_{3^{2k}}(z) = s_{9^k}(z)$.

3. Si l'on a à effectuer un nombre h d'intégrations *fixé d'avance*, on peut améliorer notre procédé. Nous partons de l'identité

$$s_{nm}(z) = s_n(z)\, s_m(z^n) = s_m(z)\, s_n(z^m).$$

On peut représenter cette décomposition des s_{nm} en s_n et s_m comme une multiplication symbolique des symboles s_ν : $s_{nm} = s_n s_m$, qui est commutative et associative. Donc généralement

$$(3) \qquad (s_3)^\alpha (s_2)^\beta = s_{3^\alpha 2^\beta}.$$

Or je dis :

1° *Qu'en effectuant* $2\beta + 3\alpha - 2$ *intégrations on obtient l'expression* (3) *indépendamment de l'ordre dans lequel les facteurs de* (3) *sont multipliés;*

2° *Qu'en effectuant une intégration de plus on obtient* $z^{2^\beta 3^\alpha}$.

Cela est exact pour $\alpha + \beta = 1$. On peut donc supposer que nos assertions sont vérifiées pour les valeurs moindres de $\alpha + \beta$. Alors, si le dernier facteur parmi les facteurs de (3) est s_3, on a, en posant $2^\beta 3^{\alpha-1} = \gamma$ et en effectuant $2\beta + 3\alpha - 4$ intégrations, les expressions $s_\gamma(z)$ et z^γ. Par une intégration en plus on obtient $z^{2\gamma}$ et par une dernière intégration $s_\gamma(1 + z^\gamma + z^{2\gamma}) = s_{2^\beta 3^\alpha}$. Donc on a obtenu $s_{3^\beta 2^\alpha}$ par $2\beta + 3\alpha - 2$ intégrations. Une intégration de plus donne $z^\gamma z^{2\gamma} = z^{3\gamma}$. Le raisonnement étant analogue si le dernier facteur en (3) est s_2, nos assertions sont démontrées.

Il suffit évidemment de considérer $\beta = 0, 1, 2$. On obtient la règle :

Si l'on ne cherche qu'à effectuer h intégrations ($h \geq 0$), *on représente h dans*

la forme $h = 3\alpha + 2\beta - 2$ $(\beta = 0, 1, 2)$, *ce qui est toujours possible d'une seule façon, et l'on parvient par h intégrations à* $s_{3\alpha 2\beta}(z) = (s_3)^\alpha (s_2)^\beta$.

4. On peut améliorer encore l'approximation donnée par la règle énoncée, en utilisant les représentations suivantes :

$$(4) \qquad s_5(z) = \left(1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} z + z^2\right)\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} z + z^2\right),$$

$$(5) \qquad s_7(z) = \left(1 - 2\cos\frac{2\pi}{7} z + z^2\right)\left(1 - 2\cos\frac{\pi}{7} z + z^2\right)\left(1 - 2\cos\frac{3\pi}{7} z + z^2\right)$$

qui impliquent 2 resp. 3 intégrations. Donc, si (3) finit par les facteurs s_2^2, $s_2 s_3$, s_3^2, on les remplacera resp. par s_5, s_7, $s_2 s_5$.

Nous avons calculé les valeurs numériques des coefficients des formules (4), (5) avec 14 décimales exactes. On a

$$s_5(z) = (z^2 + 1{,}61803398874989 z + 1)(z^2 - 0{,}61803398874989 z + 1)$$

et les trois facteurs de la représentation (5) de $s_7(z)$ sont

$$(z^2 - 1{,}24697960371747 z + 1),$$
$$(z^2 + 1{,}80193773580484 z + 1), \quad (z^2 + 0{,}44504186791263 z + 1).$$

5. Nos considérations s'appliquent au cas de l'équation fonctionnelle du type $\varphi(z) - \Phi\varphi(x) = f(x)$ si la convergence pour les polynomes symboliques en Φ est définie convenablement.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les points de Peano de certains systèmes d'équations différentielles*. Note de Mlle **Marie Charpentier**, présentée par M. Paul Montel.

Soit le système d'équations différentielles

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = g(x, y, z), \end{cases}$$

où f et g sont continues par rapport à l'ensemble des variables x, y, z, dans une région $\mathcal{R}$.

Dans ces conditions, par un point P peuvent parfois passer plusieurs courbes intégrales : nous désignerons par $\mathcal{H}(\mathrm{P})$ l'ensemble de toutes les courbes intégrales de (E) passant par P.

Le point P sera dit *point de Peano* s'il existe deux nombres distincts, x_1 et x_2 tels que, pour $x_1 \leq x \leq x_2$, $\mathcal{H}(P)$ ne se réduise pas à une courbe unique et que, x_0 étant l'abscisse de P, on ait $x_1 \leq x_0 \leq x_2$. En précisant : P est dit point de Peano gauche si $x_0 = x_2$; droit si $x_0 = x_1$ et complet si $x_1 < x_0 < x_2$.

Désignons par $\mathcal{C}_{x_i}(P)$ la section de $\mathcal{H}(P)$ par le plan $\mathcal{L}_i(x = x_i)$, $\mathcal{C}_{x_i}(P)$ est un continu (Kneser); chaque point frontière M de $\mathcal{H}(P)$ est atteint par une courbe intégrale passant par P et restant de P en M sur la frontière de $\mathcal{H}(P)$, mais parfois non prolongeable sur cette frontière [1] comme le montre l'auteur par un exemple. Ce même exemple fournit des points Q tels que la section de $\mathcal{H}(Q)$ par le plan $x = 0$ soit un cercle : cette section peut donc être doublement connexe; nous allons étudier ces différents cas. Nous nous bornerons à l'étude de $\mathcal{H}(P)$ pour $x > x_0$. Appelons $\mathcal{F}_{x_i}$ la frontière de $\mathcal{C}_{x_i}$.

I. Nous dirons qu'une suite d'ensembles E_{x_i} situés dans des plans $\mathcal{L}_i(x = x_i)$ a pour limite un ensemble E_{x_k} situé dans $\mathcal{L}_k(x = x_k)$, si l'écart des projections de E_{x_i} et E_{x_k} sur $\mathcal{L}_0$ tend vers zéro avec $|x_i - x_k|$. Il vient :

LEMME I. — *Les ensembles $\mathcal{C}_x(P)$ varient continûment avec x.*

LEMME II. — *Tout point M de la frontière de $\mathcal{H}(P)$ contenu dans $\mathcal{L}_k$ est limite à gauche de points frontières des $\mathcal{C}_{x_i}(P)$ et, s'il est limite à droite de points frontières des $\mathcal{C}_{x_i}$, il appartient à $\mathcal{F}_{x_k}$.*

COROLLAIRE. — *$\mathcal{F}_x(P)$ est, à droite, fonction continue de x et, à gauche, fonction semi-continue inférieure de x.*

Nous désignerons par $\mathcal{F}_{x_k}^0$ l'ensemble limite des $\mathcal{F}_{x_i}(P)$ quand x_i tend vers x_k en croissant, et par λ, l'écart des deux ensembles $\mathcal{F}_{x_k}$ et $\mathcal{F}_{x_k}^0$.

LEMME III. — *$\mathcal{F}_x(P)$ est fonction continue de x, sauf pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x.*

D'autre part : « Une condition suffisante pour qu'une courbe intégrale de la frontière de $\mathcal{H}(P)$ ne soit pas, à partir d'un certain point $M(x_k)$, prolongeable sur la frontière de $\mathcal{H}(P)$, est que M appartienne à $\mathcal{F}_{x_k}^0 - \mathcal{F}_{x_k}$ »; puis « Les points N à partir desquels on ne peut prolonger la courbe intégrale de la frontière de $\mathcal{H}(P)$ y aboutissant, sont, s'ils appartiennent à $\mathcal{F}_{x_k}$, des points d'accumulation de tels points M ou N ».

De plus, si nous appelons E l'ensemble des points de Peano gauches, tout point M ou N appartient à $\bar{E}$.

---

[1] M. NAGUMO et M. FUKUHARA, *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, 3e série, **12**, no 9, p. 233.

II. Appelons *trou* de $\mathcal{C}_{x_i}$ (P) une des composantes bornées du complémentaire de $\mathcal{C}_{x_i}(P)$. Nous dirons que le trou $\mathcal{O}_i$ a bifurqué si des courbes intégrales issues de $\mathcal{O}_i$ rencontrent le plan $\mathcal{L}_j$ $(x = x_j)$ en deux trous distincts.

Lemme IV. — *Un trou ne peut pas bifurquer à gauche; s'il bifurque à droite, il existe dans* $\mathcal{H}(P)$ *un point de Peano gauche entre les plans* $\mathcal{L}_i$ *et* $\mathcal{L}_j$ *ou peut-être dans* $\mathcal{L}_j$.

Lemme V. — *L'ensemble des* x, *pour lesquels une suite de trous* $\mathcal{O}_i$ *traversés par les courbes intégrales issues d'un trou déterminé* $\mathcal{O}$ *existe, est fermé à gauche; il a donc un dernier point à gauche* α *et les trous ont un dernier trou à gauche* $\mathcal{O}_\alpha$.

Remarque. — Le diamètre des trous $\mathcal{O}_i$ (x décroissant) est fonction de x, continue à droite et semi-continue inférieur à gauche.

Soit une suite de trous $\mathcal{O}_i$ rencontrés en U_i par une même courbe intégrale et dont $\mathcal{O}_\alpha$ est le dernier trou à gauche, de diamètre μ.

On peut trouver dans $\mathcal{C}_{x_i}$ deux points M_i et N_i dont la distance tende vers zéro avec $x_\alpha - x_i$ et dont la distance relative à $\mathcal{C}_{x_i}$ soit supérieure à $\mu - 2\varepsilon$ pour x_i assez voisin de x_α et inférieur à α.

Soit Q_i le premier point de contact à gauche des courbes intégrales passant par M_i et N_i, l'abscisse de Q_i sera inférieure à $x_\alpha - [(\mu - 2\varepsilon)/(2\sqrt{2M})]$.

Les arcs $Q_i M_i$ et $Q_i N_i$ ont, lorsque N_i et M_i tendent vers un même point R, comme ensemble d'accumulation des arcs d'intégrales passant par R et ayant leur premier point de contact à gauche d'une abscisse inférieure ou égale à $x_\alpha - [(\mu - 2\varepsilon)/(2\sqrt{2M})]$. Donc : *R est un point de Peano gauche.*

On pourra ajouter que : ou bien $\mathcal{C}_{x_1}(R)$, x_1 étant l'abscisse d'un de ces premiers points de contact et à gauche, n'est pas simplement connexe, ou bien, sur toute intégrale à gauche issue de $\mathcal{O}_\alpha$, existe un point de Peano.

Tout ceci montre en particulier que ces cas n'existent pas pour des équations E satisfaisant à une condition d'unicité unilatérale.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la détermination des fonctions analytiques.* Note (1) de M. Alexandre Ghika.

Une fonction analytique $f(x)$ d'une variable complexe holomorphe dans un domaine ouvert D simplement connexe, de frontière rectifiable C,

(1) Séance du 11 avril 1938.

est uniquement déterminée par les valeurs $f(z)$ qu'elle prend sur un ensemble E de C, $m(E) > 0$ vers lesquelles tend $f(x)$, suivant les chemins non tangents à C ([2]).

Étant donné $F(z)$ supposée de carré de module sommable le long de E, nous avons trouvé la condition nécessaire et suffisante pour que $F(z)$ donne naissance à une fonction $f(x)$ de l'ensemble $\Omega(C)$, c'est-à-dire holomorphe dans le domaine ouvert D, tendant suivant les chemins non tangents à C, presque partout vers une fonction $f(z)$ de carré de module sommable et représentable par l'intégrale de Cauchy relativement à C. De plus, nous avons déterminé la fonction $f(x)$ par des développements en série dépendant des valeurs $F(z)$ qu'elle prend sur E.

1. En orthogonalisant et normalisant la suite $[(z-a)^n]$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ le long de E $m(E) > 0$, on obtient un système de polynomes $[P_n(z)]$. Nous avons démontré que *la condition nécessaire et suffisante pour que ce système soit complet, est que l'ensemble* CE complémentaire de E par rapport à C, *soit de mesure positive*. Si $m(CE) = 0$, le système précédent est complet seulement relativement à $\Omega(C)$.

La condition nécessaire et suffisante annoncée, est que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \int_E F(z) Q_n(z)\, dz \right|^2$$

soit convergente, $[Q_n(z)]$ *étant un système complet de polynomes orthogonaux et normaux le long de* CE.

Dans ces conditions

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{F(z)}{z-x}\,dz - \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E F(\zeta)\, Q_n(\zeta)\, d\zeta \, \frac{1}{2\pi i}\int_{CE} \frac{\overline{Q_n(z)}}{z-x}\,ds \qquad (ds = |dz|),$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente dans tout domaine D_i complètement intérieur à D.

2. On peut procéder aussi d'une autre façon : soit $[\varphi_n(z)]$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ un système de polynomes orthogonaux et normaux le long de C, complet relativement à $\Omega(C)$, les fonctions

$$u_m(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x) \int_E P_m(z)\, \overline{\varphi_n(z)}\, ds$$

([2]) M. Lusin et J. Priwaloff, *Ann. Scient. E. N. S.*, **42**, 1925, p. 156.

vérifient les relations

$$\int_C u_m(z)\,\overline{P_n(z)}\,ds = \begin{cases} 1 & (n = m), \\ 0 & (n \neq m). \end{cases}$$

Posons

$$\alpha_{mn} = \int_C u_m(z)\,\overline{u_n(z)}\,ds.$$

Toute fonction $f(x)$ de $\Omega(C)$ est développable en série de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n u_n(x) \qquad \text{où} \quad g_n = \int_C f(z)\,\overline{P_n(z)}\,ds,$$

la série étant absolument et uniformément convergente dans tout domaine D_i et convergente en moyenne du second ordre le long de C. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $[g_n]$ donne naissance à une fonction de $\Omega(C)$ est que la série $\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} g_m \overline{g}_n$ soit convergente.

En particulier, on a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{nk}\, u_k(x).$$

Posons

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{nk}\, P_k(x).$$

Le système $[u_n(z);\ v_n(z)]$, biorthogonal et normal le long de E, est *complet relativement à* $\Omega(C)$.

On a aussi

$$g_n = \int_E f(z)\,\overline{v_n(z)}\,ds.$$

Les coefficients g_n dépendent donc uniquement des valeurs de $f(z)$ le long de E.

On a

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{mn} g_m \overline{g_n} = \int_C |f(z)|^2\,ds,$$

le premier membre étant, par conséquent, un invariant par rapport à $E[m(E) > 0$ et $m(CE) > 0]$.

La condition nécessaire et suffisante annoncée, est que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{mn}\int_{E}F(z)\overline{u_n(z)}\,ds\int_{E}\overline{F(z)}\,u_n(z)\,ds+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E}F(z)\overline{u_n(z)}\,ds\int_{E}\overline{F(z)}\,P_n(z)\,ds$$

soit convergente. Dans ces conditions

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\int_{E}E(z)\,\overline{\varphi_n(z)}\,ds,$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente dans tout domaine D, et convergente en moyenne du second ordre le long de C.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur quelques propriétés des transformations pseudo-conformes avec un point frontière invariant.* Note de M. **Silvain Wachs**, présentée par M. Paul Montel.

Le théorème de M. Julia concernant les transformations d'un cercle sur un domaine partiel avec un point frontière invariant repose sur le lemme de Schwarz. Une généralisation immédiate de ce lemme et du théorème de Riemann-Poincaré au cas des T. P. (nous désignerons ainsi les transformations pseudo-conformes) n'est pas possible. Mais on peut, avec M. Bergmann [1], introduire pour chaque domaine borné $\mathcal{B}$ une fonction, dite fonction-noyau, $K(z, \bar{z})$; $(z)=(z_1, z_2)$ et, à l'aide de K, construire dans $\mathcal{B}$ une métrique $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$: $ds^2_{\mathcal{B}}=\Sigma T_{m\bar{n}}\,dz_m\,d\bar{z}_n$, $T_{m\bar{n}}=\partial^2 \operatorname{Log} K/\partial z_m \partial \bar{z}_n$, invariante par rapport aux T. P. et donner pour quelques grandeurs caractéristiques pour **G** des inégalités rendant les mêmes services que le lemme de Schwarz. De plus, M. Bergmann montre que pour certaines questions concernant l'étude des T. P. on peut remplacer le voisinage d'un point Q de la frontière de $\mathcal{B}$ par le voisinage de Q regardé comme appartenant à un domaine plus simple $\mathcal{C}$ (*domaine de comparaison*). Si $\mathcal{C}$ est équivalent à une hypersphère, le point Q est dit du troisième degré (voir B_1, p. 16 et 91).

---

(1) Voir principalement M. Bergmann, *Journal de Crelle*, **169**, 1932, p. 1-40 et **172**, 1934, p. 89-128; *Rendiconti D. R. A. Nazion. dei Lincei*, (6a), **19**, 1934, p. 474-478; *Recueil mathématique*, 1-43, 1936, p. 78-96, respectivement désignés par B_1, B_2, B_3 dans le texte.

M. Miniatoff [2] a indiqué que ses méthodes permettent de généraliser le théorème de M. Julia. Nous montrerons dans la présente Note qu'on peut aller dans cette direction beaucoup plus loin sous des hypothèses bien moins restrictives.

THÉORÈME I [3]. — *Étant donné un domaine* $\mathcal{B}$, *un point* Q_3 *du troisième degré sur sa frontière et une* T. P. $\mathbf{W}=[W_k=W_k(Z_1, Z_2), (k=1, 2)]$ *changeant* $\mathcal{B}$ *en* $\mathcal{G}\subset\mathcal{B}$ *et laissant* Q_3 *invariant, s'il existe une suite dénombrable de points* $\{Z^{(n)}\}$ *convergeant vers* Q_3 *et telle que le rapport*

$$L_1^{(n)}=\frac{F[W_1^{*(n)}, W_2^{*(n)}]}{F[Z_1'^{(n)}, Z_2'^{(n)}]}$$

tende vers une limite finie et positive Γ_1 *lorsque n augmente indéfiniment, on a, pour tout point* $\{z\}$ *situé dans un voisinage* $\mathcal{V}(Q_3)$ *de* Q_3 *suffisamment petit mais indépendant de* $\mathbf{W}$,

$$\Gamma_1 B(W_1^*, W_2^*)\geq B(Z_1'^*, Z_2'^*)$$

avec

$$B(u_1, u_2)=\frac{F(u_1, u_2)}{|u_1|^2},\qquad F(u_1,u_2)=\rho_1(u_1+\overline{u_1})-|u_1|^2-|u_2|^2,$$

$$W_1^*=\frac{w_1}{1+\alpha_2 w_1},\qquad W_2^*=\frac{w_2}{1+\beta_2 w_1};\qquad Z_1'=\frac{z_1}{1+\alpha_2 z_1},\qquad Z_2'=\frac{z_2}{1+\beta_2 z_1},$$

$$Z_1'^*=\frac{\rho_2 z_1}{\rho_1+a_4 z_1},\qquad Z_2'^*=\frac{\rho_2}{\rho_1}\,\frac{z_2}{1+\beta_2 z_1}\,\frac{(\rho_1+a_2 z_1)^2}{(\rho_1+a_3 z_1)(\rho_1+a_4 z_1)}.$$

Idée de la démonstration. — Soient $\mathcal{A}$ un domaine de comparaison extérieur pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{I}$ un domaine de comparaison intérieur, l'un et l'autre équivalant à une hypersphère (voir B_1, p. 18-22).

Soit $\mathbf{T}$ une T. P. changeant $\mathcal{A}$ en $\mathcal{I}$, alors la T. P, $\mathbf{W}_1=\mathbf{WT}$ change $\mathcal{A}$ en $\mathcal{F}\subset\mathcal{G}\subset\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$. D'autre part, pour toute transformation

$$l_k=l_k(Z_1, Z_2)\qquad (k=1, 2)$$

changeant une hypersphère $\mathcal{H}$ (ou un domaine équivalent $\mathcal{H}$) dans un domaine $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}\subset\mathcal{H}$, on a l'inégalité $ds_{\mathcal{H}}(l_1, l_2)\leq ds_{\mathcal{H}}(z_1, z_2)$ (voir B_3, p. 81), d'où il résulte pour la distance non-euclidienne mesurée avec la métrique $\mathbf{G}_{\mathcal{H}}$

---

(2) *Comptes rendus*, 201, 1935, p. 711-713.

(3) Dans tout ce qui suit nous utilisons les coordonnées normales en Q_3 : Q_3 est l'origine, $z_1+\overline{z_1}$ la normale intérieure à la frontière de $\mathcal{B}$ au point Q_3 (voir B_1). Les lettres $a, b, A, B; \alpha, \beta, \rho$ avec ou sans indices désignent toujours des constantes *ne dépendant que du domaine considéré*.

entre deux points $\{Z^{(k)}\}$ et leurs images $\{W^{(k)}\}$ $(k = 1, 2)$, l'inégalité

$$\varpi_{\mathcal{H}}[W^{(1)}, W^{(2)}] \leqq \varpi_{\mathcal{H}}[Z^{(1)}, Z^{(2)}].$$

En faisant tendre $Z^{(1)}$ et $W^{(1)}$ vers Q, on obtient l'inégalité de l'énoncé.

THÉORÈME II. — *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent où* $L_1^{(n)}$ *doit être remplacé par* $L_2^{(n)} = F[\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}]/F[Z_1^{(n)}, Z_2^{(n)}]$ *et* Γ_1 *par* Γ_2, *en supposant en outre qu'à l'intérieur de* $\mathcal{G} = \mathbf{W}(\mathcal{B})$ *il existe une hypersphère*

$$\mathcal{H} = E[|z_1 - \rho|^2 + |z_2|^2 - \rho^2 < 0],$$

on a

$$\Gamma_2 B(\eta_1, \eta_2) \leqq B(Z'_1, Z'_2),$$

où B, F, Z'_1, Z'_2 *sont les mêmes qu'au théorème* I *et où*

$$\eta_1 = \frac{\rho_1}{\rho} w_1, \qquad \eta_2 = \frac{\rho_1}{\rho} w_2.$$

THÉORÈME III. — *Avec les conditions des théorèmes* I *et* II *et si l'on suppose que* $\mathbf{W}$ *transforme le cône*

$$\mathcal{C}_{mp}(z) = E\left[0 < z_1 + \bar{z}_1 < p, \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{z_1 + \bar{z}_1} < m\right]$$

en un domaine intérieur au cône $\mathcal{C}_{m'p'}(w)$; *m, p, p'm' étant convenablement choisis, on a pour tout point* $\{z\}$ *appartenant à* $\mathcal{C}_{mp}(z)$ *l'inégalité*

$$0 < A < \left|\frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(w_1, w_2)}\right| < B < \infty.$$

Idée de la démonstration. — Des théorèmes I et II et des hypothèses faites, on déduit $0 < a < [(w_1 + \bar{w}_1)/(z_1 + \bar{z}_1)] < b < \infty$ (voir B_1, p. 1 à 15), de

$$\frac{K_{\mathcal{C}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{H}}(w, \bar{w})} \leqq \left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(z_1, z_2)}\right|^2 = \frac{K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{G}}(w, \bar{w})} \leqq \frac{K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{C}}(w, \bar{w})}$$

et des limitations obtenues pour $K_{\mathcal{C}}$, $K_{\mathcal{J}}$, $K_{\mathcal{H}}$ (voir B_1, p. 2, 18-20), on déduit l'inégalité de l'énoncé.

De ce dernier théorème, on déduit facilement des bornes inférieures et supérieures pour le volume du domaine $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ transformé de $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}_{mp}(z)$ ainsi que pour *l'aire* (au sens indiqué en B_3, p. 476), $\mathbf{W}(\mathcal{S})$ transformée de la surface $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_{mp}(z)$, $\mathbf{W}$ étant une transformation du type indiqué.

Enfin, on peut étendre ces théorèmes sans grandes modifications au cas des transformations non-univalentes.

AVIATION. — *Sur les enseignements du vol naturel et leurs applications aux machines volantes capables de stationner en l'air.* Note de M. **Étienne Œhmichen**, présentée par M. Jean Tilho.

Au cours d'une vingtaine d'années de recherches concernant plus spécialement l'observation du vol sur place des animaux, l'étude analytique des faits expérimentaux ainsi que l'établissement des principes dont cette étude nous a indiqué les bases (ou qu'elle est venue confirmer), nous avons réussi à mettre en évidence les trois catégories de phénomènes suivants.

A. *Influence des percussions sustentatrices.* — Nous avons recherché si le mouvement des ailes d'un animal volant sur place était de nature à provoquer entre les ailes et l'air agité périodiquement l'apparition d'un cycle de réactions plus ou moins assimilables à celui que l'on connaît en électrodynamique et suivant lequel l'intensité et la tension offrent une différence de phase de quatre-vingt-dix degrés. Les appareils de synthèse que nous avons construits dans ce but, ont en grande partie confirmé ces vues et montré notamment que les maxima de la pression efficace sur les ailes tendent à se manifester vers les extrémités de la course de celles-ci. Ces maxima ont le caractère de percussions intenses, de durée très courte, dont nous avons pu, par le calcul, montrer l'importance relativement à la puissance nécessaire à l'entretien de la sustentation.

Ces principes n'ont pas encore pu s'appliquer de façon pratique à nos sustentateurs mécaniques.

B. *Influence de l'inclinaison.* — Ayant observé que l'insecte passe du vol sur place au vol en translation horizontale par simple changement de l'inclinaison du plan dans lequel battent ses ailes, nous avons cherché si, en utilisant des hélices sustentatrices dont l'axe serait incliné sur la verticale d'un angle convenable, on pourrait arriver à voler économiquement.

L'expérience a montré que dans certaines conditions on peut, avec une hélice inclinée, obtenir simultanément une grande composante sustentatrice et un très bon rendement propulsif suivant l'horizontale. Cette propriété a été mise à profit pour l'établissement de nos appareils de vol.

C. *Influence de la masse fluide stabilisatrice.* — Nous avons montré le rôle stabilisateur que peut avoir, sur un corps sustenté dans l'air par réaction, l'adjonction à ce corps d'une masse convenable d'air placée dans

les conditions de l'ambiance et enfermée, complètement ou partiellement dans une enveloppe assujettie au corps en position convenable ([1]).

D'autre part, on sait que tout corps en mouvement dans un fluide lie à son mouvement une certaine masse de ce fluide, qui lui est en quelque sorte accrochée d'une façon plus ou moins lâche et qui l'accompagne dans tous ses mouvements : le centre de gravité du corps considéré isolément ne coïncide donc plus avec celui du système *corps-masse liée*. Par suite il apparaît comme évident que cette *masse fluide d'accompagnement* doit exercer une action plus ou moins importante sur l'orientation du corps sur sa trajectoire et sur la forme même de cette trajectoire (E. Œhmichen, *Revue scientifique*, 15 septembre 1937).

Dans le vol sur place, chez l'insecte et l'oiseau, dont les ailes aux extrémités de leur course attaquent l'air sous des angles considérables, la masse équivalente est importante et ses effets sur la stabilisation de l'animal ne sont vraisemblablement pas négligeables. Par contre les hélices sustentatrices bien faites n'ont qu'une masse équivalente faible, si bien que la stabilisation d'une machine capable de voler sur place ne peut pratiquement être obtenue par des méthodes identiques à celle des oiseaux et des insectes.

Ballonnet stabilisateur. — Par application des principes posés ci-dessus, nous avons pu réaliser une machine de démonstration comportant un ballonnet rempli d'air froid donnant à l'appareil une stabilité automatique complète ([2]).

Cette solution n'apportant aucun allègement à la charge des hélices sustentatrices, l'appareil doit posséder une puissance motrice considérable; en outre, en cas d'arrêt du moteur, la vitesse de descente deviendrait dangereuse. L'appareil est donc stabilisé, mais la sécurité dépend du bon fonctionnement du moteur.

Cette sécurité peut être considérablement augmentée si l'on substitue un

---

([1]) Cf. E. Œhmichen, *Mécanismes naturels et technique humaine*, fasc. II, p. 36 à 62. Paris, 1938.

([2]) *Expérience d'Orly*, 2 mars 1935. Un hélicoptère de 40 chevaux à quatre hélices, surmonté d'un ballonnet sphérique de 100^{m^3}, gonflé d'air froid et rigidement assujetti à l'appareil, a permis à l'auteur de s'élever et de stationner en équilibre parfait à des hauteurs comprises entre 4 et 20^m, pendant près de 5 minutes, et cela sans aucun organe de pilotage, en n'ayant à sa disposition que la manette d'admission des gaz au moteur et le contact électrique.

gaz léger à l'air froid. La stabilisation obtenue reste alors sensiblement la même, mais le taux de la charge supportée par les hélices sustentatrices étant diminué, l'efficacité de celles-ci est fortement améliorée; de plus, si l'on donne au ballonnet une forme fuselée (au lieu de sphérique), la vitesse de descente de l'appareil en cas d'arrêt du moteur peut se trouver réduite à 4^m environ par seconde, ce qui, avec de bons amortisseurs, permet d'arriver au sol sans danger.

A l'hélicoptère utilisant des hélices inclinées ou inclinables, et ainsi stabilisé par un ballonnet allongé et gonflé à l'hydrogène ou à l'hélium, nous avons donné le nom d'*hélicostat* : le film cinématographique projeté sur l'écran montre qu'il possède à peu près toutes les qualités requises pour la réalisation pratique du vol mécanique vertical et qu'il présente toutes les garanties voulues de stabilité et de sécurité.

Il réalise ainsi à peu près toutes les évolutions aériennes des oiseaux et des insectes, *plus deux* qui lui appartiennent en propre : virage sur place en plein ciel et vol à reculons.

Remarques de M. **Jean Tilho** *au sujet de l'hélicostat.*

La réalisation pratique de l'appareil de vol vertical dont les performances viennent d'être présentées à l'Académie a une grande importance au point de vue géographique et une plus grande encore au point de vue colonial : l'hélicostat, en effet, est appelé à rendre de précieux services pour l'étude de la surface de la terre, partout où celle-ci est d'un accès trop difficile aux autres modes de locomotion ; et cela, grâce à ses qualités particulières de vol, qui le différencient complètement de l'avion [3].

En effet, il peut marcher à grande allure ou très lentement; stationner à volonté, aussi longtemps et à telle hauteur que nécessaire; voler à recu-

---

([3]) Le film projeté montre un modèle d'hélicostat du poids total de 700^{kg}, dont le ballonnet de 450^{m^3} est gonflé à l'hydrogène : puissance 40 CV; nombre d'hélices, 5 dont 2 principales inclinées, à pas fixe, à la fois sustentatrices et propulsives, et 3 auxiliaires, à pas instantanément variable et réversible, pour la manœuvre.

L'appareil s'élève verticalement et descend de même. Sa vitesse limite à la verticale est à la montée de 3^m environ par seconde; à la descente elle est comprise entre 0^m et $4^m,50$ à la seconde. Il peut s'enlever et atterrir en tous terrains pourvu qu'il dispose d'un petit espace dégagé de quelques mètres carrés.

Il se déplace horizontalement en l'air à des vitesses réglables à volonté; il peut

lons; franchir des obstacles au ras du sol; atterrir doucement, en vol vertical ou oblique, sur tous terrains, même en pente, pourvu qu'ils présentent quelques mètres carrés de surface bien dégagée, etc. Grâce à quoi, l'hélicostat pourra évoluer aussi bien le long de crêtes montagneuses ou de falaises aux flancs inaccessibles, que dans des gorges aux berges escarpées ou au-dessus de marécages, de lacs, de fleuves, de forêts, autrement dit partout où il serait utile de faire à *vues directes* des observations géographiques précisées par des photographies prises à courte distance : toutes choses évidemment irréalisables pour l'avion qui doit voler vite et ne peut stationner en l'air.

Au point de vue colonial (et plus spécialement africain), là où les moyens mécaniques de communication sont rares et précaires, l'hélicostat résoudrait élégamment et à peu de frais les problèmes des relations fréquentes et rapides entre les chefs-lieux de circonscription, les postes administratifs et les groupements indigènes disséminés dans l'immensité de la brousse ou de la forêt.

Au point de vue humanitaire, l'hélicostat médical serait précieux dans la lutte continuelle que nous devons mener contre les épidémies, surtout contre ce redoutable fléau qu'est la maladie du sommeil : car, actuellement encore, les inspections sanitaires s'effectuent trop souvent à pied ou à cheval, le long d'étroites pistes indigènes et avec toutes les lenteurs, les sujétions, les aléas des convois de porteurs ou d'animaux de bât, auxquels il est difficile de demander plus de 20 à 30^{km} de marche par jour.

Transports des courriers postaux, déplacements rapides des fonctionnaires, des ingénieurs, des commerçants, des prospecteurs, des industriels, etc., l'hélicostat pourrait assurer tout cela, car il irait partout où l'avion ne peut s'aventurer faute de terrains d'atterrissage préparés d'avance et soigneusement entretenus.

Il ne serait donc pas un rival pour l'avion, mais son meilleur complément et même son plus utile collaborateur dans l'œuvre de civilisation et de

---

s'arrêter en plein vol en un point fixé d'avance, stationner en l'air aussi longtemps que nécessaire; évoluer et franchir des obstacles en marche arrière aussi bien qu'en marche avant; virer sur place aussi facilement qu'en plein vol; il peut raser et voler en se défilant derrière des rideaux d'arbres ou de maisons. Enfin il peut atterrir par ses propres moyens par des vents assez forts; il peut se passer d'une équipe de manœuvre à terre, car un simple harpon lui permet de se maintenir face au vent après arrêt complet du moteur.

mise en valeur économique poursuivie par la France dans ses territoires d'outre-mer.

Sans insister autrement sur l'immense champ d'activité qui s'offre à l'hélicostat au point de vue géographique, touristique et commercial, je ne veux pas passer sous silence la plus sérieuse critique que l'on puisse lui faire : celle de l'insécurité due à l'hydrogène gonflant le ballonnet, faute de sources d'hélium en France ou dans nos colonies. L'objection n'est pas très grave, pour deux raisons : d'abord il n'est pas encore démontré que les États-Unis d'Amérique refuseraient de nous vendre les quelques milliers de mètres cubes d'hélium éventuellement nécessaires à nos hélicostats coloniaux (à ceux, du moins, qui seraient consacrés à la lutte contre les épidémies); ensuite, il ne faut pas perdre de vue que les *dangers d'explosion*, en cas d'utilisation de l'hydrogène, *n'existent que dans les ballons rigides*, où le mélange détonant peut aisément s'effectuer *grâce à l'air interstitiel qui entoure les ballonnets porteurs et à l'hydrogène que ces derniers diffusent en plus ou moins grande quantité.* Dans le ballon souple, au contraire, le danger d'explosion est nul et le danger d'incendie moindre, sauf en cas d'attaque de l'appareil par balles incendiaires, éventualité fort improbable au cœur de l'Afrique, en temps de paix tout au moins.

C'est pourquoi l'on peut prédire qu'il ne peut manquer de se créer, dans un avenir assez proche, une confiante et efficace collaboration entre les puissants avions réservés aux longs parcours et les futurs hélicostats des services locaux, chargés de desservir les régions avoisinant les grandes lignes aériennes, et cela, sans qu'il n'y ait jamais à craindre entre eux des rivalités et des concurrences rappelant celles de nos transports métropolitains par route et par voie ferrée.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur la distribution moyenne des électrons dans un atome complexe.* Note de M. **Assène Datzeff**, présentée par M. Louis de Broglie.

Nous chercherons la distribution des électrons dans un atome à plusieurs électrons à l'aide de la méthode des barrières de potentiel. Soit un atome de numéro atomique Z. Admettons que la distribution des électrons soit à symétrie sphérique, et numérotons les Z électrons successifs, en commençant par celui qui est le plus près du noyau. Le $k^{\text{ième}}$ électron peut être considéré dans le champ coulombien du noyau de charge Ze, diminuée

par ke (effet d'écran), tandis que l'influence des $Z-k$ électrons extérieurs donne un résultat nul sur le $k^{\text{ième}}$ électron. Cette considération peut être faite quand la distance r de cet électron au noyau varie entre r_k et r_{k+1}. L'équation de Schrödinger en coordonnées polaires pour le $k^{\text{ième}}$ électron admet comme solution une fonction $\Psi = P(\theta, \varphi)R(r)$, où $R(r)$ satisfait à l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\frac{A}{h^2} + \frac{2B}{h^2 r} + \frac{C}{r^2}\right)R = 0,$$

$$A = 8\pi^2 mE, \qquad B = 8\pi^2 me^2(Z-k), \qquad C = -l(l+1).$$

La solution de (1) s'exprime par les polynomes de Laguerre, cependant nous nous servirons d'une solution approchée, mais plus commode pour la suite. Cherchons, en effet, comme dans la méthode de Brillouin-Wentzel, une solution de la forme

$$(2) \qquad R(r) = \exp\left(\frac{2\pi i}{h}\int^r \rho\, dr\right), \qquad \rho(r) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)\rho_n(r).$$

En remplaçant (2) dans (1), on détermine les différents termes ρ_n. En ne retenant que les deux premiers, vu la petitesse de h, on trouve

$$(3) \qquad R(r)_\pm = [-Ar^2 - 2Br]^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\pm\frac{2\pi i}{h}\int^r\sqrt{-A-\frac{2B}{r}}\,dr\right).$$

Les mêmes considérations peuvent être appliquées au $(k+1)^{\text{ième}}$ électron dans l'intervalle (r_{k+1}, r_{k+2}). La différence du cas précédent est que le champ coulombien est provoqué par la charge $(Z-k-1)e$; donc B aura la valeur $B_{k+1} = 8\pi^2 me^2[Z-(k+1)]$, et ainsi de suite pour tous les électrons. Les choses se passent comme si un seul électron traversait une suite de barrières successives, le potentiel étant coulombien dans chacune d'elles, et discontinu sur la limite commune de deux barrières voisines. Dans chaque barrière élémentaire la solution de (1) est de la forme $R_k = a_k R_+ + b_k R_-$, a et b étant des constantes arbitraires. Pour la première barrière, où le champ est Ze^2/r, donc infini pour $r=0$, on ne doit prendre que la solution qui s'annule pour $r=0$. Dans la dernière barrière, qui s'étend jusqu'à l'infini, le potentiel est e^2/r, et des deux ondes $R_\pm(3)$ on choisira celle qui a l'exponentielle négative, et qui est par conséquent nulle à l'infini. On doit maintenant écrire les conditions de continuité de R et de R′ pour $r=r_k$, et l'on trouvera deux relations linéaires entre a_{k+1}, b_{k+1} et a_k b_k. On aura donc $2Z-2$ amplitudes avec $2Z-2$ conditions de continuité, d'où l'on peut déterminer les amplitudes, et aussi la solution dans chaque barrière

élémentaire. Puisque nous cherchons une distribution moyenne, et pour effectuer plus facilement les calculs, nous admettrons que le nombre des électrons devienne très grand, leur densité dans un volume donné restant constante. Dans l'intervalle très petit $r_{k-1} - r_k = \Delta r_k$ l'électron est soumis au champ $V_k = e^2(Z-k)/r$. Quand l'électron change d'intervalle, B_k varie de la quantité très petite $B_{k+1} - B_k = \Delta B_k$. On doit ajouter dans ce cas la condition $\Sigma \Delta B_k = 8\pi^2 me^2 Z$. La supposition sur la variation de B est équivalente à l'hypothèse que B est inversement proportionel à r.

Ce problème de détermination des a_k, b_k est tout à fait semblable au problème que nous avons traité dans une autre Note [1]. En gardant seulement les infiniment petits de premier ordre par rapport aux Δr_k, on exprimera (a_{k+1}, b_{k+1}) en fonction de (a_k, b_k) à l'aide d'une matrice presque diagonale $M_k = \| m_{\alpha\beta} \|$, $\alpha, \beta = 1, 2$, comme M_k de [1]. Ces éléments sont de la forme

$$(4) \qquad m_{11} = e^{\Delta\alpha_k - \Delta\rho_k}, \qquad m_{22} = e^{-\Delta\alpha_k - \Delta\rho_k}, \qquad m_{12} = \Delta\sigma_k e^{\beta_k}, \qquad m_{21} = \Delta\sigma_k e^{-\beta_k},$$

où α_k, β_k, ρ_k, σ_k sont des fonctions connues de r_k. En effectuant le produit $M = \Pi M_k$, on trouve les éléments de la matrice de transformation M en fonction de r (M est multipliée par une fonction de θ et de φ, sans importance). Par conséquent (a_{k+1}, b_{k+1}) seront connues en fonction de r, et l'on trouvera une fonction de distribution $R(r)$. Elle s'exprime par des séries d'intégrales multiples, exactement comme dans (1). $R(r)$ est nul pour $r = 0$, et la valeur asymptotique de R tend vers zéro quand $r \to \infty$. Les résultats des calculs paraîtront ailleurs.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur un critérium pour l'identification des petites planètes.* Note [1] de M. **Benjamin de Jekhowsky**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Étant donné que la comparaison d'une observation isolée d'un astéroïde nouveau avec l'éphéméride calculée d'un astéroïde ancien est difficile après un certain temps, M. Luc Picart [2] a remarqué qu'en ajoutant aux données de l'observation les dérivées des coordonnées, on peut, si l'on fait abstraction

---

[1] *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 558.

[1] Séance du 2 mai 1938.
[2] *Comptes rendus*, **161**, 1915, p. 88.

des perturbations, obtenir une relation simple, qui peut servir de critérium pour affirmer, dans le calcul de l'orbite, l'identité ou la non-identité de deux astres.

Cette relation indépendante du temps entre les éléments de l'orbite et les coordonnées géocentriques observées d'une petite planète, ainsi que leurs dérivées, a été établie sous une autre forme encore par Lagrange (*Œuvres*, 7, p. 469-483) et elle lui a servi de base pour une méthode de calcul des orbites. Plus tard, la même relation a été reprise par Cauchy (*Œuvres*, 1re série, 10, p. 424, 469, 474).

M. J. F. Cox ([3]), en proposant sa méthode d'identification des petites planètes, a fait une critique du procédé de M. Luc Picart.

Étant donné qu'à approximation égale, plus l'application d'une méthode est facile et expéditive, plus elle est avantageuse, il nous semble que, si le critérium de M. Luc Picart n'a pas été souvent appliqué, c'est surtout parce qu'il exige de longs calculs.

En désignant par λ_1, λ_2, λ_3 les cosinus directeurs de la direction géocentrique observée de la planète et par $d\lambda_1/dt$, $d\lambda_2/dt$, $d\lambda_3/dt$ leurs dérivées par rapport au temps, puis par ν_1, ..., $d\nu_1/dt$, ..., les quantités analogues se rapportant au Soleil, enfin par C_1, C_2, C_3 les constantes des aires, exprimées en fonction des éléments équatoriaux de l'orbite de la planète, on trouve, sous une forme générale, pour le critérium la relation

$$(1)\qquad (C_1\lambda_1+C_2\lambda_2+C_3\lambda_3)\left\{(C_1\lambda_1+C_2\lambda_2+C_3\lambda_3)-R^2\begin{vmatrix}\lambda_1 & \nu_1 & \frac{d\nu_1}{dt}\\ \lambda_2 & \nu_2 & \frac{d\nu_2}{dt}\\ \lambda_3 & \nu_3 & \frac{d\nu_3}{dt}\end{vmatrix}\right\}$$

$$=(C_1\nu_1+C_2\nu_2+C_3\nu_3)R^2\begin{vmatrix}\nu_1 & \lambda_1 & \frac{d\lambda_1}{dt}\\ \nu_2 & \lambda_2 & \frac{d\lambda_2}{dt}\\ \nu_3 & \lambda_3 & \frac{d\lambda_3}{dt}\end{vmatrix},$$

qui, en changeant le plan de référence et en prenant comme tel celui de l'écliptique, donne le critérium sous la forme proposée par M. Luc Picart, forme dont le calcul est assez long, car l'avantage qui résulte de l'emploi

([3]) *Recherches sur les petites planètes*, Bruxelles, 1932, p. 28 et 29.

comme éléments de référence des coordonnées écliptiques paraît bien faible en raison des calculs nouveaux qui deviennent alors nécessaires.

On arrive au but assez rapidement, en remarquant que l'équation du plan xy

(2) $$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0,$$

en remplaçant x, y, z par leurs valeurs tirées de

(3) $$\xi = \rho\lambda_1 = x + X, \qquad \eta = \rho\lambda_2 = y + Y, \qquad \zeta = \rho\lambda_3 = z + Z,$$

donne

(4) $$\rho(C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3) \\ = C_1\xi + C_2\eta + C_3\zeta = R(C_1\nu_1 + C_2\nu_2 + C_3\nu_3) = C_1 X + C_2 Y + C_3 Z,$$

d'où, avec les données d'observation et en supposant que l'astre observé est identique à une certaine planète dont on connaît les éléments de l'orbite, on déduit immédiatement la distance géocentrique ρ de la planète par la formule

(5) $$\rho = \frac{C_1 X + C_2 Y + C_3 Z}{C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + C_3\lambda_3},$$

et, par conséquent, en multipliant les deux membres de la relation (1) par ρ^2 puis en la simplifiant, on a, pour le critérium,

(6) $$C_1\xi + C_2\eta + C_3\zeta = \begin{vmatrix} \xi & X & \frac{dX}{dt} \\ \eta & Y & \frac{dY}{dt} \\ \zeta & Z & \frac{dZ}{dt} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & \xi & \frac{d\xi}{dt} \\ Y & \eta & \frac{d\eta}{dt} \\ Z & \zeta & \frac{d\zeta}{dt} \end{vmatrix}$$

l'expression sous forme de déterminants qui sont faciles à calculer.

Réservant pour une publication plus étendue les détails relatifs aux considérations précédentes et ceux d'une méthode d'identification des petites planètes, notons que, si nous désignons par δ_1 une des coordonnées angulaires rapportées à des axes qui correspondent à la position particulière du trièdre général que l'on obtient quand on place la planète au périhélie, on a

(7) $$\cos i_1 \sin\delta - \sin i_1 \sin(\alpha - \Omega_1)\cos\delta = \sin\delta_1;$$

de sorte que, en introduisant une quantité analogue D_1 définie par la

relation

(8) $$\cos i_1 \sin D - \sin i_1 \sin(A - \Omega_1) \cos D = \sin D_1.$$

A et D étant les coordonnées du Soleil, la relation (5) devient

(9) $$\rho \sin \delta_1 = R \sin D_1,$$

et nous pouvons écrire, pour l'expression (6),

(10) $$k\sqrt{p} \sin \delta_1 = \Delta_1 + R \frac{\sin D_1}{\sin \delta_1} \Delta_2,$$

Δ_1 et Δ_2 désignant les déterminants de la relation (1) lorsque l'on introduit dans ces déterminants les coordonnées du Soleil et leurs dérivées.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Méthode de calcul des dalles avec des moments d'inertie inégaux.* Note [1] de M. **V. A. Nicolsky**, présentée par M. Henri Villat.

Soit une dalle de forme quelconque avec des moments d'inertie I_x et I_y suivant les directions des axes x et y. La relation existant entre la surcharge p et les dérivées de la déformation w peut s'écrire, si I_x et I_y, tout en étant différents, sont constants dans l'étendue de la dalle,

(1) $$I_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + I_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1 - \eta^2}{E} p.$$

Attribuons à H la valeur

$$H = \sqrt{I_x I_y}$$

au lieu de

$$2H = I_x + I_y$$

préconisée habituellement.

Au lieu des coordonnées x et y envisageons les coordonnées s et y

(2) $$s = \alpha x = \sqrt[4]{\frac{I_y}{I_x}}\, x,$$

on aura

(3) $$\frac{\partial^n w}{\partial x^n} = \alpha^n \frac{\partial^n w}{\partial s^n},$$

---

[1] Séance du 2 mai 1938.

et il vient

$$I_y \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + 2 I_y \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial y^2} + I_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1-\eta^2}{E} p,$$

expression correspondant à une dalle d'un moment d'inertie constant I_y.

Pratiquement, ce sont les moments qu'il est le plus intéressant de connaître. Dans le système x, y et dans le cas de la dalle de moments d'inertie I_x et I_y,

$$\mu_x = \frac{EI_x}{1-\eta^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\mu_y = \frac{EI_y}{1-\eta^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$$

D'après les relations (2) et (3), et dans le système s et y,

$$(4) \quad \begin{cases} \mu_x = \dfrac{EI_y}{1-\eta^2}\left(\sqrt{\dfrac{I_x}{I_y}} \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \eta \dfrac{I_x}{I_y} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ \mu_y = \dfrac{EI_y}{1-\eta^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \sqrt{\dfrac{I_y}{I_x}} \dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right), \end{cases}$$

η étant le coefficient de Poisson.

Comme on le voit, les calculs d'une dalle des moments d'inertie variables, peuvent être ramenés à celui d'une dalle de moment d'inertie constant. Ainsi, dans le cas d'une dalle rectangulaire et, par exemple, uniformément chargée, il suffirait de considérer une autre dalle dont le rapport des côtés est modifié conformément à la relation (2). Une vérification, dans le cas concret d'une dalle rectangulaire appuyée, avec des moments d'inertie variables, a montré la bonne concordance des chiffres donnés par notre méthode et des résultats de la résolution directe du problème. Notre méthode est surtout intéressante pour le cas où la solution du problème de la plaque homogène se manifeste comme laborieuse, comme celui par exemple de la dalle rectangulaire encastrée.

Remarquons enfin que l'application de notre méthode n'est nullement limitée au cas de dalles rectangulaires.

ÉLECTRONIQUE. — *Sur la matérialisation d'un photon dans le champ d'un électron.* Note de M. **Aurelio Marques da Silva**, présentée par M. Jean Perrin.

Au cours d'expériences sur la matérialisation de l'énergie des rayons β, réalisées avec un appareil Wilson, nous avons obtenu, sur une paire de

clichés stéréoscopiques, une fourche triple constituée par un électron positif et deux électrons négatifs. Aucune trajectoire d'électron ne venant aboutir au sommet commun des trois autres, cette fourche triple ne peut pas être attribuée à la matérialisation de l'énergie d'un électron. Nous pensons qu'elle résulte de la matérialisation d'un photon ayant lieu, non dans le champ d'un noyau atomique, mais dans le champ d'un des électrons périphériques de l'atome.

Ce phénomène a été prévu et étudié, du point de vue théorique, par M. Francis Perrin [1], mais n'a jamais, à notre connaissance, été observé.

Pour satisfaire aux lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion, l'énergie du photon doit être d'au moins $4\,m_0c^2$, m_0 étant la masse au repos de l'électron, soit environ 2,0 MeV. Si on appelle α le rapport $h\nu/m_0c^2$ entre l'énergie du photon et l'énergie d'un électron au repos, les énergies cinétiques des trois particules après la matérialisation (électron dans le champ duquel s'est produite la matérialisation et électrons positif et négatif créés par cette matérialisation) sont nécessairement comprises entre les deux valeurs

$$\frac{\alpha^2 - 2\alpha - 2 \pm \sqrt{\alpha(\alpha - 4)}}{2\alpha + 1}\, m_0c^2.$$

Pour les photons de 2,65 MeV du ThC″ ces limites sont 75 ekV et 1225 ekV.

Notre source était constituée par un petit cylindre de laiton activé sur une de ses bases par le dépôt actif du Th. Elle était placée dans un petit canaliseur en Pb suffisant pour canaliser convenablement les rayons β mais pas les rayons γ. Le canaliseur avec la source était placé à l'extérieur de la chambre Wilson, en face d'une fenêtre en Al de 30^μ d'épaisseur. A l'intérieur de la chambre était placé, suivant un diamètre, un écran de Pb de $0^{mm},05$ d'épaisseur. La chambre était entourée d'une bobine destinée à créer un champ magnétique. Celui-ci était de 638 gauss.

La fourche triple semble prendre naissance dans l'écran de Pb. Nous avons pu mesurer le rayon de courbure des trois trajectoires et en déduire l'énergie. On a obtenu : pour le positon 326 ekV, pour un des négatons 223 ekV et pour l'autre 713 ekV. Évidemment rien ne permet de distinguer de ces deux négatons quel est celui qui préexistait et celui qui a été créé par matérialisation. Les valeurs données ont une précision de l'ordre de 10 pour 100.

---

[1] *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 1100.

Si l'on ajoute ces trois énergies et plus 1,0 MeV nécessaires pour la création de la masse des deux électrons de matérialisation, on obtient 2,3 MeV. Cette valeur devait correspondre à l'énergie du photon. Il faut cependant remarquer que si la matérialisation a eu lieu à l'intérieur de l'écran de plomb les énergies mesurées sont plus petites que les énergies au moment de la matérialisation. L'énergie perdue par un électron pour la traversée complète de l'écran est de 200 ekV. On peut donc admettre que l'énergie du photon responsable du phénomène est de 2,65 MeV, les photons de cette énergie étant particulièrement abondants dans le spectre du ThC''. Les résultats quantitatifs sont en bon accord, aux erreurs expérimentales près, avec les prévisions théoriques.

Nous n'avons pas pu mesurer les angles entre les directions d'émission des particules et la direction initiale du photon, celle-ci étant très mal définie à cause de l'insuffisance du canaliseur.

Les photographies de la fourche seront publiées ailleurs.

ÉLECTRICITÉ. — *Étude théorique d'un transport d'ions par un courant de vapeur pour l'obtention de hautes tensions.* Note de M. **Jean Virgitti**, présentée par M. Charles Fabry.

Quelques idées ont déjà été émises sur le sujet actuel [1]. Je me propose de l'étudier ici complètement dans un cas bien défini.

Considérons un tube cylindrique en matière isolante de diamètre d et de longueur l parcouru par un fluide gazeux de vitesse u.

Supposons que ce fluide ait traversé préalablement un champ ionisé produit par exemple par l'effet couronne d'un fil fin. On sait qu'à une faible distance de ce fil il n'y a plus que des ions de même signe [2].

Le fluide considéré peut donc, si certaines conditions que nous allons examiner sont remplies, entraîner ces ions que l'on recueillera dans un collecteur approprié.

Un calcul simple, tenant compte de l'expansion des ions dans le tube, montre que la quantité maxima d'électricité que l'on peut recueillir par seconde dans le collecteur est donnée par la formule

$$(1) \qquad Q = \frac{u^2 d^2}{16 k l} \qquad (k \text{ mobilité des ions dans le fluide considéré}).$$

---

[1] M. Pauthenier et Mme Moreau-Hanot, *Comptes rendus*, **201**, 1935, p. 1332.
[2] M. Pauthunier et P. Mallard, *Comptes rendus*, **189**, 1929, p. 635 et 843.

Pour obtenir une très grande vitesse d'écoulement nous utiliserons la détente adiabatique d'une vapeur sèche entre une chaudière munie d'un surchauffeur d'une part, et un condenseur d'autre part. La détente s'effectuera à travers une tuyère de Laval prolongée par un tube cylindrique. Nous supposerons l'appareil placé dans l'air.

Cela conduit à utiliser une vapeur ayant les propriétés suivantes :

La mobilité des ions doit y être aussi faible que possible;

Le potentiel explosif pour une distance d'électrodes donnée doit être plus grand que dans l'air pour que la décharge du collecteur ne puisse avoir lieu à l'intérieur du tube du côté du condenseur, où la pression est forcément plus basse que la pression atmosphérique. La valeur de ce potentiel détermine la masse spécifique et par conséquent l'état de la vapeur dans le condenseur.

La vapeur de tétrachlorure de carbone se prête bien à une telle utilisation : elle est ininflammable; la mobilité des ions y a pour valeur $k = 0,3$ cm/sec pour un champ de 1 volt/cm; les potentiels explosifs valent 3,5 fois les potentiels explosifs dans l'air, comme le montrent les mesures effectuées par nous avec des sphères de 10^{mm} de diamètre, pour des potentiels compris entre 17 et 47,2 kV.

Ces mesures montrent en outre que, pour un potentiel explosif donné, la distance explosive dans l'air à 15°C est au moins égale à 4,7 fois la distance explosive dans la vapeur saturante de CCl^4 à 76 C., et par conséquent quelle réduction de l'encombrement des générateurs de haut potentiel pourrait être obtenue en plaçant ces appareils dans une atmosphère de vapeur de CCl^4.

Considérons maintenant de la vapeur sèche de CCl^4 à la pression $p_1 = 239^{cm}$ de mercure et à la température $T_1 = 414°$ absolus qui se détend à la pression $p_2 = 21^{cm}.5$ et à la température $T_2 = 313°$ absolus. Il n'y aura pas de condensation dans le tube car les valeurs de p_1, T_1, p_2, T_2 satisfont à la relation

$$(2) \qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \qquad (\gamma = 1,13);$$

en outre aucune décharge n'est à craindre du côté du condenseur, car, dans l'état p_2, T_2, la masse spécifique de la vapeur est égale à 1700×10^{-6} C. G. S., alors que la limite inférieure acceptable de la valeur de cette masse spécifique est 1600×10^{-6} C. G. S.

En négligeant les pertes de charge dues aux frottements, le problème

est déterminé par la formule de de Saint-Venant

$$u_x = a_1\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}\sqrt{1-\frac{T_x}{T_1}} \tag{3}$$

(a_1 = célérité du son dans la vapeur à la température T_1), par l'équation caractéristique

$$\frac{\rho_1}{\rho_x} = \left(\frac{p_1}{p_x}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{4}$$

et par l'équation de continuité

(5) $m = S_x u_x \rho_x$ (m = masse de vapeur qui s'écoule par seconde).

Si nous prenons $d_m = 5^{\text{cm}}$ dans le col de la tuyère, on trouve que le débit en masse est de 2500^{g} par seconde.

La vitesse d'écoulement du fluide dans la section terminale de la tuyère de Laval serait de 3×10^4 cm/sec, soit 2,2 fois la célérité du son dans la vapeur prise à la température de cette section. Le diamètre de la section terminale, et par conséquent du tube, serait de 8^{cm} environ.

En supposant que le rendement calorifique de l'ensemble chaudière-foyer soit de 0,75, il faudrait fournir pour vaporiser 2500^{g} de CCl^4 par seconde, 216 grandes calories, soit l'équivalent de 900 kW.

Pour $l = 100^{\text{cm}}$ le courant recueilli dans le collecteur, calculé d'après la formule (1), serait de 130 microampères.

Conclusion. — Le procédé de production de hautes tensions envisagé serait réalisable en principe, mais à des conditions tellement onéreuses qu'il est pratiquement sans intérêt devant les procédés déjà connus, et en particulier celui qui consiste à entraîner les charges par des particules matérielles.

MAGNÉTISME. — *Mesure du moment atomique du rhénium tétravalent.* Note [1] de MM. **Nicolas Perakis**, **Tryphon Karantassis** et **Léandre Capatos**, transmise par M. Pierre Weiss.

I. Nous avons montré [2] que le rhénium métallique et le rhénium heptavalent possèdent, tous deux, un paramagnétisme constant

$$\chi_{Re} = +0,366.10^{-6} \times 186,31 = 68,2.10^{-6}, \qquad \chi_{Re^{VII}} = +9,2.10^{-6}.$$

---

(1) Séance du 2 mai 1938.

(2) N. Perakis et L. Capatos, *Comptes rendus*, **196**, 1933, p. 611, et **198**, 1934, p. 1905; *Jour. Phys.*, 7e série, **17**, 1935, p. 462-468.

Si l'on admet que l'ion Re^{VII} a une configuration électronique du type gaz rare, l'on devrait avoir pour le rhénium tétravalent, avec un paramagnétisme variable, un moment de 3,87 magnétons de Bohr, soit 19,17 magnétons de Weiss.

Une première détermination du moment de l'ion Re^{IV}, faite par W. Schüth et W. Klemm [3], a confirmé l'ordre de grandeur théorique.

Substance. Résultats d'analyse.	T (°).	$\chi.10^6$.	$\chi_A.10^6$.	Θ.	C_A.	p_W.	p_B.	p_B, d'après Klemm.
K^2ReCl^6 = 477,3.	295	9,29	4.607		1,856			
Échantillon nº 1.	294	9,24	4.572		1,837			
Février 1938.	273	9,74	4.819		1,836			
Cl pour 100,	273	9,82	4.857	—108	1,850	19,1	3,86	3,6
calculé 144,6;	250	10,45	5.161		1,848			
trouvé 114,56.	196	12,27	6.028		1,832			
	83	19,88	9.662		1,845			
	293	9,14	4.534		1,827			
Échantillon nº 2.	273	9,64	4.773		1,828			
Mars 1938.	250	10,33	5.104	110	1,837	19,0	3,84	
	196	12,12	5.958		1,823			
	81	19,82	9.631		1,839			
K^2ReBr^6 = 744,0.	295	5,77	4.531		1,812			
Février 1938.	273	6,06	4.744		1,793			
Br pour 100,	250	6,46	5.042	105	1,790	18,9	3,82	3,7
calculé 64,45;	195	7,78	6.022		1,807			
trouvé 64,49.	83	12,58	9.593		1,803			
	296	7,22	5.014		1,785			
	295	7,22	5.017		1,781			
Cs^2ReCl^6 = 664,7.	273	7,65	5.297	60	1,764	18,8	3,80	
Février 1938.	250	8,32	5.748		1,782			
	196	10,06	6.903		1,767			
	82	18,79	12.704		1,804			

T température en degrés absolus, χ coefficient d'aimantation, χ_A coefficient d'aimantation atomique, Θ point de Curie, C_A constante de Curie atomique, p_W moment en magnétons de Weiss, p_B moment en magnétons de Bohr.

Dans ce qui va suivre, nous exposerons les résultats d'une étude des composés K^2ReCl^6 (hexachlororhénate de potassium), K^2ReBr^6 (hexa-

(3) *Zeit. Anorg. Allgem. Chem.*, 27 octobre 1934, p. 183-192.

(4) On a respectivement pour K^+, Cl^-, Br^- et Cs^+

$$-16,5.10^{-6}, \quad -23,1.10^{-6}, \quad -33,9.10^{-6} \quad \text{et} \quad -38,0.10^{-6}.$$

bromorhénate de potassium) et Cs^2ReCl^6 (hexachlororhénate de cesium), qui nous a permis de déterminer avec précision le moment du rhénium tétravalent.

II. Les complexes étudiés ont été préparés et analysés par nous. Pour les mesures magnétiques, nous avons utilisé la méthode d'attraction dans un champ non uniforme. Nous avons pris l'eau comme substance étalon. La correction du diamagnétisme du reste de la molécule a été faite ([5]).

III. Le tableau ci-contre traduit les résultats de l'étude thermomagnétique de ces trois composés du rhénium tétravalent.

Dans les trois combinaisons étudiées ici ([6]), le rhénium tétravalent possède un paramagnétisme variable du type de Weiss.

La moyenne des quatre valeurs trouvées pour le moment de l'ion Re^{IV}, soit 18,95 magnétons de Weiss, ou 3,83 magnétons de Bohr, se confond pratiquement avec le moment 3,87 relatif au spin des électrons.

SPECTROSCOPIE. — *Sur la répétition de l'ensemble du spectre de vibration des molécules organiques au voisinage de chacune des fréquences* (CH) *de vibration, fondamentale ou harmonique.* Note ([1]) de M. **Yeou Ta**, présentée par M. Aimé Cotton.

Diverses études avaient déjà été poursuivies dans le proche infrarouge sur les molécules du type CHX^3 ([2]). C'est par l'emploi d'un spectromètre à réseau et surtout par l'examen des substances sous de grandes épaisseurs que *nous avons pu mettre en évidence avec netteté, au voisinage des bandes harmoniques* (CH), *des bandes faibles correspondant à la répétition de l'ensemble du spectre de vibration.*

En effet nous avons examiné systématiquement les spectres d'absorption infrarouges de $CHCl^3$, $CHBr^3$, CHI^3 sous des épaisseurs de 0,1, 1, 2, 5, 10, 50, 100, 180 et 280mm, de 1 à 2μ,5 environ. Nous avons utilisé un spectromètre à réseau plan (580 traits/mm) et à miroirs; les fentes occupent environ 30 Å dans le spectre; le

---

([5]) P. Weiss, *Jour. Phys.*, 7e série, 1, 1930, p. 185-193.

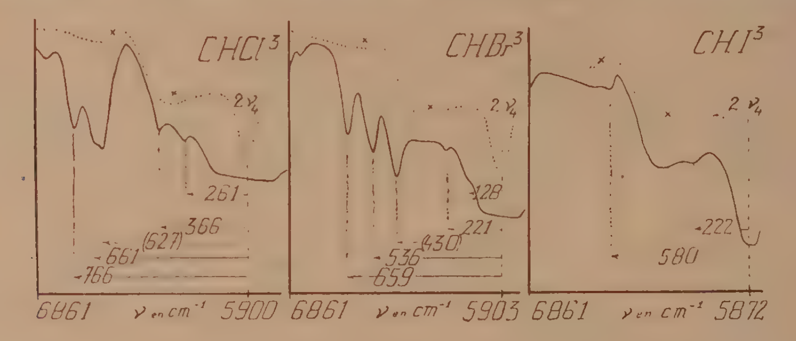
([6]) Avec ReO^2 et ReS^2, où le rhénium est aussi à l'état tétravalent, Schüth et Klemm (*loc. cit.*) ont trouvé un paramagnétisme pratiquement constant.

([1]) Séance du 2 mai 1938.

([2]) A. Easley, L. Fenner and B. J. Spence, *Astr. Phys.*, 67, 1928, p. 185; R. Freymann et A. Naherniac, *Journ. Phys.*, 5, 1934, p. 75; Corin, *Journ. Chim. Phys.*, 33, 1936, p. 448; P. Barchewitz, *Thèse*, Paris, 1938.

système récepteur est constitué par une thermopile dans le vide reliée à un galvanomètre Zernicke; les déviations de ce dernier sont amplifiées optiquement (10^m), puis enregistrées par la méthode de Lecomte ([3]). Pour discriminer le spectre du deuxième ordre du réseau, nous utilisons une cuve à eau. Nous avons tenu compte, d'une part, des bandes de la vapeur d'eau atmosphérique, et, d'autre part, d'une anomalie due au réseau ([3]); c'est cette dernière qui se traduit dans la figure (marquées d'une croix) par deux larges bandes vers $1^\mu,55$ (faible), et $1^\mu,61$ (intense).

A l'aide de ce dispositif nous avons étudié les 4 bandes principales suivantes : vers $1^\mu,7$ et $1^\mu,2$ les bandes $2\nu_4$ et $3\nu_4$ [1er et 2e harmonique de



la fréquence de valence ν_4(CH) vers 3000 cm^{-1}]; vers $2^\mu,4$ et $1^\mu,4$ les bandes $\nu_4+\delta_{45}$ et $2\nu_4+\delta_{45}$ [combinaison de ν_4 et $2\nu_4$ avec la fréquence de déformation δ_{45}(CH) vers 1200 cm^{-1}]. Ces bandes sont déjà très intenses sous de très faibles épaisseurs; quand nous augmentons celles-ci, des bandes faibles apparaissent, bandes que nous allons examiner plus particulièrement au voisinage de $1^\mu,7$, les faits étant relativement plus nets dans ce cas. (*Voir* la figure où la courbe pointillée correspond à une épaisseur de 1^{mm}; la courbe en trait plein correspond à 180^{mm}.)

1° *Étude des bandes faibles voisines de la bande principale de* $1^\mu,7$. — Comme le montre la figure pour $CHCl^3$, $CHBr^3$ et CHI^3 (épaisseur 180^{mm}), il est remarquable que *la différence* $\Delta\nu$ *entre la fréquence de ces bandes faibles et la fréquence de la bande principale correspond justement à chacune des fréquences de vibration observées soit dans l'infrarouge lointain* ([3]), *soit dans l'effet Raman*. Ceci prouve que la fréquence $2\nu_4$ s'est combinée avec chacune des fréquences δ_{12}, δ_3, ν_1, ν_{23}, δ_{45}. Par exemple,

([3]) *Le spectre infrarouge*, Paris, 1928; *Spectre d'absorption infrarouge* (*Traité de Chimie organique*, Paris, 1936); *Comptes rendus*, **196**, 1933, p. 1011; G. Emschwiller et J. Lecomte, *Journ. Phys.*, **8**, 1937, p. 130.

pour $CHCl^3$, nous obtenons respectivement 135 (?), 261, 366, 627 (?), 661, 766, 1187 cm^{-1}, alors que l'effet Raman ou l'infrarouge lointain donnent 261, 366, 667, 761, 1216 cm^{-1}. De même, pour $CHBr^3$ nous avons noté 128, 221, 430 (?), 536, 659, 886 (?), 969 (?), 1119 cm^{-1} au lieu de 154, 222, 539, 655, 1144 cm^{-1}.

Ajoutons que la précision de nos mesures ne dépasse pas $\pm 5\,cm^{-1}$; on ne doit d'ailleurs pas s'attendre à un accord numérique parfait, car on devrait introduire des corrections d'anharmonicité. D'autre part, précisons que l'attribution que nous avons faite pour les diverses bandes se rapporte non seulement à la valeur du $\Delta\nu$ trouvé, mais également à l'aspect général du spectre.

Enfin, si $CHCl^3$ et $CHBr^3$ ont été étudiés à l'état pur, CHI^3 a été examiné en solution saturée dans CS^2, de sorte qu'on ne pouvait constater toutes les fréquences de vibration.

2° *Généralisation de l'observation précédente.* — L'observation précédente, relative à $2\nu_4$, ne tient pas à une coïncidence fortuite; en effet la même répétition du spectre de vibration se retrouve, plus ou moins nette, au voisinage des trois autres bandes principales $\nu_4 + \delta_{45}$, $2\nu_4 + \delta_{45}$ et $3\nu_4$. Sans donner ici l'ensemble des bandes observées et leur classification, indiquons seulement que, pour $CHCl^3$, $\nu_4 + \delta_{45}$ à 4211 cm^{-1} est accompagné de bandes s'écartant respectivement de 44 (?), 265, 372, 531 (?), 564 (?), 662, 1165 cm^{-1}; de même, à partir de $2\nu_4 + \delta_{45}$, à 7807 cm^{-1} on note 359, 521 (double ?), 738, 1130 cm^{-1}; enfin, $3\nu_4$ à 8665 cm^{-1} est accompagné de 384, 711, 780, 1171 cm^{-1}.

Il est vraisemblable que la même régularité doit se retrouver au voisinage de la fréquence fondamentale ν_4.

Les observations que nous venons de faire pour CHX_3 *doivent être tout à fait générales :* 1° En ce qui concerne le proche infrarouge, des recherches préliminaires, que nous avons faites entre 1 et 2$^{\mu}$,5 pour $CHCl^2 - CCl^3$, $CHCl = CCl^2$ et quelques autres substances, semblent confirmer ces vues et nous nous proposons d'étendre nos observations à des molécules plus complexes encore; 2° en ce qui concerne l'infrarouge lointain, des fréquences de combinaison du même type doivent se produire à partir de δ_{45}.

RAYONS X. — *La diffusion des rayons X sous les très faibles angles appliquée à l'étude de fines particules et de suspensions colloïdales.* Note de M. **André Guinier**, présentée par M. Charles Mauguin.

L'appareil que j'ai décrit dans une Note précédente (¹) permet d'obtenir des faisceaux de rayons X monochromatiques (raie Cu K α) convergents de très petite ouverture (15'), avec lesquels il devient possible de mesurer l'intensité du rayonnement diffusé par un corps dans des directions faisant avec les rayons X incidents des angles beaucoup plus faibles que ceux qu'on peut atteindre par les montages habituels. On évite la diffusion par l'air en plaçant tout l'appareil dans le vide ou dans l'hydrogène. Je suis ainsi arrivé à supprimer tout voile (intensité inférieure à 10^{-7} de l'intensité incidente) à partir d'un angle de diffusion de 45 minutes, le temps de pose pour un diagramme de corps amorphe étant de 2 à 3 heures.

A l'aide de cette méthode, on constate qu'en général l'intensité diffusée par un corps solide ou liquide tend vers une valeur faible quand on se rapproche de la direction du faisceau incident (valeur extrêmement faible pour les cristaux et poudres cristallines, plus notable pour les liquides ou solides amorphes). Par contre, pour certaines substances, l'intensité diffusée est très grande pour les très petits angles (probablement maxima dans la direction du faisceau incident), décroît très rapidement quand on s'écarte du faisceau incident et s'annule sensiblement pour un angle en général inférieur à 4 à 5 degrés; de sorte que l'on aperçoit sur le cliché une tache centrale de petit diamètre très intense, bien plus intense que le reste du diagramme (raies ou anneaux). Warren (²) avait déjà signalé que la diffusion du noir de fumée augmente beaucoup vers les petits angles. Les corps qui présentent une diffusion centrale intense ont le caractère commun d'être constitués par un agrégat de particules extrêmement fines (dimensions comprises entre 10 et 100 Å), assez distantes les unes des autres ou baignant dans un milieu homogène.

Parmi les corps cristallisés, ceux qui présentent un maximum central donnent des raies de Debye-Scherrer floues et la tache est d'autant plus grande que les raies sont plus larges, c'est-à-dire que les cristallites sont

---

(¹) *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 1115.

(²) *Journ. of Chem. Phys.*, **2**, 1934, p. 551.

plus petits. J'ai réalisé l'expérience avec du graphite, des métaux pyrophoriques ou catalytiques, des métaux colloïdaux en solution ou à l'état floculé, des fibres de cellulose, etc. Parmi les corps amorphes, le charbon sous ses différentes formes et la silice gélatineuse desséchée (silicagel) donnent les taches les plus larges. L'expérience peut être faite aussi avec des solutions colloïdales : la gomme arabique, par exemple, à l'état solide, donne simplement un anneau sans diffusion centrale importante; en solution, cet anneau disparaît, mais on en aperçoit un autre qui coïncide à peu près avec celui de l'eau pure, en même temps qu'apparaît une tache centrale intense qui révèle la présence des micelles colloïdales.

Dans le cas de particules élémentaires de dimension plus petite (< 10 Å), pour les mêmes longueurs d'onde (de l'ordre de 1,5 Å), il existe une diffusion notable au centre, mais qui n'est plus étroitement limitée et qui est bien moins intense. C'est le cas des solutions vraies, où les molécules dissoutes diffusent comme les molécules d'un gaz.

Il est difficile d'évaluer le diamètre de la tache centrale qui semble s'accroître avec le temps de pose; d'autre part on ne peut parler de largeur à mi-intensité, puisqu'on ne connaît pas l'intensité maxima. Mais il est possible de tirer du microphotogramme des données quantitatives précises grâce au résultat théorique suivant : soient N atomes (ou molécules) groupés en petites particules toutes identiques de K atomes chacune; sans faire aucune hypothèse sur la structure interne de la particule, on trouve pour l'intensité diffusée aux angles très faibles l'expression

$$\frac{I}{I_0} = NKA\left[e^{-\frac{4\pi^2}{3\lambda^2}\varepsilon^2 R^2} + B\varepsilon^4 + \ldots\right];$$

A est l'intensité diffusée par un atome, ε l'angle de diffusion, et $R^2 = \frac{1}{K}\sum_1^K r^2$, r étant la distance de chaque atome au centre de gravité de la particule; R caractérise l'étendue de la particule et joue un rôle analogue au rayon de giration utilisé en Mécanique. L'étude de la diffusion centrale donne donc deux grandeurs : d'abord la valeur de R, puis, si l'on mesure l'intensité incidente et la masse du diffuseur, le nombre d'atomes moyen d'une particule; ces deux résultats simultanés donnent des renseignements sur la forme des particules.

On utilise habituellement la mesure de la largeur des raies données par les substances microcristallines pour obtenir des indications sur la

taille des cristallites. La méthode de la diffusion centrale conduit à des résultats à la fois plus généraux (elle s'applique aussi bien aux particules amorphes) et plus précis, car la largeur des raies est fonction d'autres facteurs que la taille des cristallites (forme et absorption du diffuseur, distorsion du réseau cristallin, etc.).

La nouvelle méthode s'applique à l'étude des solutions colloïdales, des phénomènes d'adsorption, de catalyse, etc. Elle a encore un autre champ d'application : en effet, l'existence de la tache centrale peut révéler l'hétérogénéité d'un produit d'apparence homogène. Ainsi elle montre que le caoutchouc, à l'état de repos, est formé d'un agrégat de particules élémentaires éloignées les unes des autres, conclusion à laquelle avait déjà conduit l'étude du caoutchouc gelé ou tendu.

Enfin, si une longueur d'onde de 1,5 Å permet de déceler des particules de l'ordre de 10 à 100 Å, des rayons durs (0,1 Å) permettraient peut-être l'étude des ions ou molécules.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Préparation, électrométrie et spectrographie U. V. de l'acide gluco-hepto-ascorbique*. Note de M. **Georges Carpéni**, présentée par M. Jean Perrin.

Afin de préciser davantage l'influence de la chaîne carbonée : 1° sur les valeurs des constantes de dissociation; 2° sur la position et l'intensité des bandes d'absorption U. V. des acides de la série ascorbique, j'ai préparé l'acide gluco-hepto-ascorbique, homologue en C^8 de l'acide ascorbique et l'ai étudié par électrométrie et spectrographie U. V. Sa formule développée est

$$CH^2OH-(CHOH)^2-\underbrace{CH-\underset{\substack{|\\OH}}{C}=\underset{\substack{|\\OH}}{C}-CO}_{\text{—O—}}$$

En partant du glucoheptose α, j'ai obtenu, par la méthode des *osones* déjà décrite [1], successivement l'osazone et l'osone, puis le nitrile, lequel par saponification acide ultérieure fournit l'acide gluco-hepto-ascorbique. La préparation n'a rien de particulier en elle-même si ce n'est que, malgré toutes les précautions prises et les essais nombreux effectués, il ne m'a pas

(1) G. Carpéni, *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 273.

été possible d'obtenir une critallisation *normale* du sirop final. Les échantillons les plus purs obtenus [soit après précipitation par le pentane ([2]), soit après desséchage du sirop final qui reste en évaporant la solution aqueuse] ont été examinés au microscope polarisant et aux rayons X. Dans le premier cas on observe une biréfringence nette, ainsi qu'un signe optique reconnaissable, sans pouvoir toutefois distinguer des facettes : aux rayons X un échantillon de sirop, desséché sous forme de poudre, m'a fourni un cliché *semi-cristallin*, à plusieurs raies, mais peu intenses et diffuses. La substance est donc nettement organisée et les deux méthodes semblent indiquer que l'on a affaire très probablement à des microcristaux qui, par suite de la présence d'une faible proportion d'impureté, ne peuvent grossir, ce qui ne saurait d'ailleurs trop surprendre chez des composés du genre de l'acide gluco-hepto-ascorbique ([3]).

Électrométrie. — N'ayant pu obtenir, dans la préparation précédente, des cristaux à l'état parfaitement pur, j'ai dû opérer sur les solutions aqueuses des échantillons les plus purs obtenus, comme il vient d'être indiqué, soit du pentane, soit du sirop final. Ces échantillons sont gardés sous vide, sur du $CaCl^2$ et à l'obscurité. La teneur en acide gluco-hepto-ascorbique des solutions aqueuses a été déterminée par titrage à l'iode. Celui-ci se fait normalement, la décoloration étant instantanée. Les courbes de titrage obtenues, en opérant exactement de la même manière que celle déjà indiquée ([4]), indiquent un point d'équivalence en accord *quantitatif* avec le titre à l'iode. Ceci confirme à nouveau la pureté de l'acide employé et nous permet d'avoir confiance dans les valeurs des constantes de dissociation obtenues, du moins en ce qui concerne la première constante, pK_1. Cependant les potentiels au cours du titrage ne sont pas constamment stables, comme cela a été le cas pour les acides *l*-ascorbique et *d*-gluco-ascorbique, et rappellent le comportement analogue des *oxy-acides* précédents ([5]). Aussi est-il permis de supposer que la principale impureté de l'acide

---

([2]) Cf. T. Reichstein, A. Grüssner et R. Oppenauer, *Helv. Chim. Acta*, 17, 1934, p. 510.

([3]) Pendant mes essais de préparation il a paru un Mémoire de B. Helferich et O. Peters (*Ber. d. chem. Ges.*, 70, 1937, p. 465) sur une nouvelle synthèse d'acides ascorbiques. Dans ce Mémoire les auteurs indiquent qu'ils ont préparé l'acide gluco-hepto-ascorbique, mais qu'ils ont renoncé à l'obtenir à l'état pur puisque « manifestement sa tendance à la cristallisation est minime ».

([4]) G. Carpéni, *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 432.

([5]) G. Carpéni, *Comptes rendus*, 203, 1936, p. 75.

employé est constituée par son produit d'oxydation. Si cette circonstance n'a pas d'effet sensible sur la première constante pK_1 (la constante de l'oxy-acide étant beaucoup plus faible), elle joue pourtant sur la seconde, pK_2. La courbe indique bien une seconde constante très faible pK_2, mais comme elle est décalée vers les faibles pH par suite de la chute des potentiels, la détermination précise, par cette méthode, de pK_2 est, dans ces conditions, impossible. Les constantes de dissociation classiques obtenues à l'électrode de verre, sont :

1° Acide gluco-hepto-ascorbique pK_1 4,30 ± 0,05; $pK_2 \sim$ 11 à 12; 2° acide oxy-gluco-hepto-ascorbique (produit d'oxydation par l'iode) $pK_0 \sim$ 8,8.

Spectrographie U. V. — La technique employée a été décrite précédemment ([5]). Les différents maxima λ_M des courbes d'absorption, ainsi que les valeurs correspondantes des coefficients ε_M d'absorption moléculaires ([6]), sont indiqués, en fonction du pH, dans le tableau suivant:

		λ_M.	ε_M.	pH.
pH ≤ 3,0	molécule non dissociée...	2430 Å	10500	— 0,1
5,5 ≤ pH ≤ 11,5	ion négatif monovalent...	2650 Å	17000	~ 6,5
pH ≥ 12,9	ion négatif bivalent......	2980 Å	14000	13,62

On constate une fois de plus (cf. I) combien la seconde constante, pourtant très faible, ressort nettement des résultats spectrographiques U. V. L'inflexion, correspondant à pK_2, de la courbe $\lambda_M = f(\mathrm{pH})$, indique une constante $pK_2 \sim 12$, valeur plus précise que celle obtenue électrométriquement.

En ce qui concerne l'influence de la longueur de la chaîne carbonée sur les propriétés étudiées (constante de dissociation et spectres U. V.) du groupe endiol-α-cétonique, on constate qu'elle est faible, ainsi qu'il fallait s'y attendre.

([6]) $\varepsilon = (1/cd) \log(I/I_0)$, c et d sont exprimés respectivement en mol/l et en centimètres.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur les acides phosphoriques condensés. Les polyphosphates.* Note de MM. **Pierre Bonneman** et **Marc Bassière**.

Dans une précédente Note ([1]) l'un de nous avait exposé les raisons qui l'amenaient à conclure à l'existence du polyphosphate $P^3O^{10}Na^5$. Un nouvel argument est fourni par l'étude aux rayons X de l'hydrate $P^3O^{10}Na^5.6H^2O$. Examinés au microscope polarisant, les cristaux de ce sel apparaissent sous forme de tablettes tricliniques limitées principalement par des faces (010) et (100), et qui sont toujours maclés. Les diagrammes de Laue et de cristal tournant montrent que l'axe (010) et le plan (100) des cristaux maclés coïncident, ce qui rend possible la détermination du volume de la maille sans connaître exactement la valeur des paramètres et des angles du réseau. On obtient ainsi les longueurs de l'axe $b = 10,23 \pm 0,05$ Å, des projections $a' = 7,53 \pm 0,04$ et $c' = 9,83 \pm 0,05$ Å des axes a et c sur les normales aux faces (100) et (001), et l'angle $\theta = 87°30'$ du dièdre des faces (100) et (001). Les angles des axes ne peuvent être facilement déterminés, mais il est certain qu'ils sont voisins de 90° et que le cristal est pseudo-orthorhombique. Le volume de la maille est

$$V = a'bc'/\sin\theta = 757 \pm 12 \text{ Å}^3.$$

La densité des cristaux, mesurée dans le xylène, est 2,12; la densité calculée pour 2 molécules $P^3O^{10}Na^5.6H^2O$ dans la maille réticulaire est $2,08 \pm 0,4$. L'accord de ces valeurs justifie la formule proposée.

Les premiers auteurs qui avaient entrevu l'existence de ce composé avaient signalé également un hydrate $P^3O^{10}Na^5.8H^2O$. Il n'a pas été possible de le retrouver; l'analyse aux rayons X, effectuée sur des cristaux fraîchement essorés et placés en tube scellé, n'a permis de conclure qu'à l'existence de l'hydrate à $6H^2O$.

Fleitmann et Henneberg ([2]) et Schwarz ([3]) avaient cru isoler un tétraphosphate répondant à la formule $P^4O^{13}Na^6$. Mais on peut constater des divergences importantes dans leurs déterminations de l'eau de cristallisation. Nous avons essayé de préparer à nouveau ce corps en suivant la méthode décrite par ces auteurs; dans tous les cas nous n'avons obtenu, en

---

(1) *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 433.

(2) *Liebigs Annalen*, 65, 1848, p. 324.

(3) *Z. Anorg. Chem.*, 9, 1895, p. 249.

reprenant par l'eau des mélanges de pyro- et de métaphosphate préalablement fondus, que le phosphate $P^3O^{10}Na^5$ et le trimétaphosphate bien connu. L'un des arguments donnés par Fleitmann en faveur de la formation du tétraphosphate était que, à côté des cristaux de trimétaphosphate en excès, on pouvait observer la présence de deux autres sortes de cristaux : des prismes droits et des plaquettes. Nous avons bien obtenu ces deux phases, mais l'analyse quantitative, les cryoscopies dans le sulfate de soude et l'étude aux rayons X ont montré qu'il ne s'agissait là que de deux facies différents d'une même variété cristalline : $P^3O^{10}Na^5.6H^2O$. Un essai de préparation à basse température, en faisant agir le métaphosphate naissant sur $P^2O^7Na^4$ d'après une technique ([1]) qui nous avait donné de bons résultats pour préparer ce dernier, n'a pas fourni de sel nouveau. Partington ([1]) a encore signalé la formation de tétraphosphate par chauffage du sel $P^2O^7Na^3H$; cette méthode ne nous a donné que du phosphate $P^3O^{10}Na^5$ souillé de trimétaphosphate. Enfin Schwarz (*loc. cit.*) avait prétendu que l'action du nitrate de plomb sur le triphosphate permettait de passer au tétraphosphate, ce qui avait été contredit par Stange ([2]); nous avons represparé le dérivé de plomb et sommes repassés aux sels de sodium en le traitant par le sulfure de sodium. Nous avons ainsi obtenu un mélange des deux sels $P^3O^{10}Na^5.6H^2O$ et $P^2O^7Na^4.10H^2O$, ce qui justifie les prévisions de Stange et permet de conclure qu'en aucun cas on n'a encore pu préparer de tétraphosphate $P^4O^{13}Na^6$.

Dans un travail tout récent Andress et Wüst ([6]) confirment l'existence du triphosphate déjà prouvée par l'un de nous ([1]). De plus, essayant de préparer le tétraphosphate par les méthodes de Fleitmann et de Partington, ils n'ont obtenu, eux aussi, que le triphosphate.

CHIMIE MINÉRALE. — *Sur l'isolement de l'europium métallique.* Note ([1]) de M. **Félix Trombe**, transmise par M. Georges Urbain.

L'europium, de numéro atomique 63, existe en très faibles quantités dans le groupe des terres rares. La séparation des éléments voisins est

([1]) *Chem. News*, **136**, 1928, p. 97.
([2]) *Z. Anorg. Chem.*, **12**, 1896, p. 444.
([6]) *Z. Anorg. Chem.*, **237**, 1938, p. 113.

([1]) Séance du 25 avril 1938.

réalisée soit par la cristallisation fractionnée de nitrates doubles en présence de bismuth ([2]), soit par réduction électrolytique à l'état de sulfate europeux SO^4Eu insoluble ([3]). La préparation à l'état métallique de l'europium en phase solide homogène n'a jamais été faite. Klemm ([4]), en 1937, a obtenu un mélange d'europium divisé et de chlorures alcalins sur lequel il a pu effectuer des mesures magnétiques.

L'oxyde d'europium utilisé possède les caractéristiques suivantes :

1° L'examen spectrographique (spectre d'arc), effectué par M. Bardet, a permis de constater l'absence de samarium et la présence de raies très faibles de gadolinium.

2° La susceptibilité magnétique χ de l'oxyde à 20°,8 est $27,55 . 10^{-6}$. Ce chiffre est très voisin de la susceptibilité théorique calculée d'après des données de Van Vleck ([5]), χ 27,67 à la même température, et de la susceptibilité trouvée par Sucksmith ([6]), χ 27,0 à 20°,8.

Le chlorure europeux $EuCl^3$ a été préparé par voie ignée, dilué dans 50 pour 100 de chlorure de potassium. Il est exempt d'oxychlorure.

Les essais de préparation du métal ont d'abord été effectués suivant la méthode qui avait permis d'obtenir l'isolement du gadolinium ([7]) et aussi avec quelques modifications du mode opératoire, l'isolement du scandium ([8]).

L'électrolyse en présence d'une cathode de cadmium, d'un mélange fondu de 40 % de $EuCl^3$, 40 % de KCl et 20 % de LiCl entre 650 et 725°, donne un alliage cadmium-europium-lithium-potassium, à 2,7 % de Eu; mais la distillation sous haut vide de l'alliage obtenu ne permet pas de séparer l'europium du lithium.

Nous avons utilisé en définitive la méthode suivante :

Le chlorure d'europium est préparé en présence de 60 pour 100 en poids de l'eutectique moléculaire chlorure de sodium-chlorure de potassium (Fusion 664°). Le point de fusion du mélange est inférieur à 650°. Il est

---

([2]) G. Urbain et H. Lacombe, *Comptes rendus*, **137**, 1903, p. 792; *Journ. Chim. Phys.*, **4**, 1905, p. 106.

([3]) L. F. Yntema, *J. Am. Chem. Soc.*, **52**, 1930, p. 2782-2784.

([4]) W. Klemm et H. Bommer, *Z. Anorg. allgem. Chem.*, **231**, 1937, p. 138.

([5]) *The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*, Oxford, 1932, p. 235.

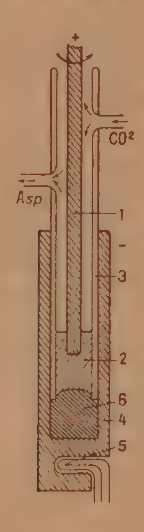
([6]) *Phil. Mag.*, **14**, 1932, p. 115-126.

([7]) F. Trombe, *Comptes rendus*, **200**, 1935, p. 459.

([8]) W. Fischer, K. Brünger et Grieneisen, *Z. Anorg. allgem. Chem.*, **231**, 1937, p. 54-62.

donc possible d'effectuer l'électrolyse vers 700° en présence d'une cathode de cadmium (Ébullition 775°).

Le creuset utilisé est figuré ci-dessous. Avec ce dispositif, la masse de cadmium mise en jeu est relativement importante vis-à-vis de la masse de chlorure fondu (2). L'anode (1), tournante pour éviter l'effet anodique, est en carbone purifié. L'électrolyse (avec 3,5 ampères sous 12 volts) peut



être poursuivie jusqu'à épuisement des sels fondus en chlorure d'europium. Le manchon de quartz (3) est en contact sur une faible surface avec le cadmium fondu qui est contenu dans le creuset de carbone (4). La température est mesurée en (5).

A 700° il n'y a pas de carburation appréciable de l'europium en solution dans le cadmium.

Nous avons obtenu un rendement de 60 pour 100 dans la transformation du chlorure d'europium en alliage cadmium-europium. La quantité de chlorure d'europium mise en jeu étant de $1^g,9$.

L'alliage obtenu titre 3,75 pour 100 de Eu. La séparation de l'europium et du cadmium n'est plus effectuée sous haut vide, mais, pour éviter la volatilisation probable de l'europium, sous une pression d'argon pur qui varie suivant les essais de 5^{cm} à 50^{cm} de mercure.

L'europium dans ces essais de purification est uniquement en contact avec du molybdène en tube ou en creuset.

Des alliages cadmium-europium à 80, 85 pour 100 de Eu sont obtenus

rapidement à 1250° sous 45 à 50^{cm} d'argon. Dans ces conditions il n'y a pas d'entraînement d'europium métallique par le cadmium. L'élimination du cadmium peut être complète si le chauffage à 1250° est prolongé pendant 5 à 6 heures. Sous une pression d'argon de 5^{cm} de mercure, à 1250°, une grande partie de l'europium distille; il se condense à 200° environ plus haut que le cadmium pur, mais contient encore une faible quantité de cadmium.

Après plusieurs chauffes successives sous argon, nous avons obtenu un métal exempt de molybdène, titrant plus de 98 pour 100 d'europium métallique (dosage de l'europium à l'état d'oxyde après élimination de la silice). La teneur en silicium est de 1 pour 100 et la teneur en fer est de l'ordre de 0,1 pour 100.

Le métal europium est gris de fer, malléable, d'une dureté voisine de celle du néodyme. Il n'attaque pas l'eau à froid.

Le point de fusion de l'europium peut être situé, d'après les essais de purification, entre 1100 et 1200°.

CHIMIE MINÉRALE. — *Étude du système*

$$PO^4HNa^2 + 2ClNH^4 \rightleftharpoons PO^4H(NH^4)^2 + 2ClNa.$$

Note de MM. **Roger Lauffenburger** et **Michel Brodsky**, présentée par M. Marcel Delépine.

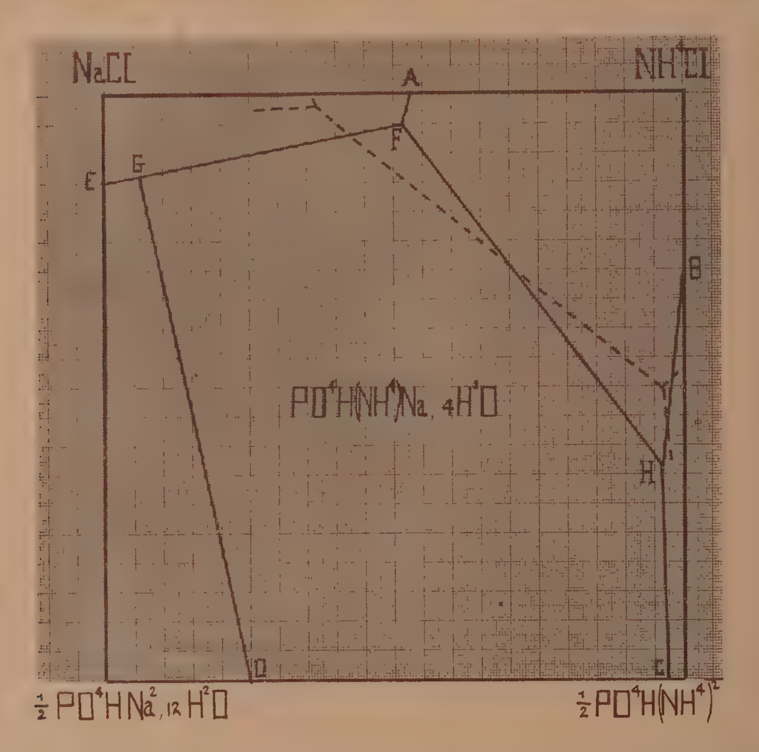
Par double décomposition entre le phosphate disodique et le chlorure d'ammonium en solution, Berzelius [1] a obtenu, dès 1816, l'orthophosphate double de sodium et d'ammonium ou sel microcosmique. C'est à ce même sel que sont arrivés plus tard différents auteurs en partant du phosphate diammonique et du chlorure de sodium, ou en attaquant le chlorure de sodium par l'acide phosphorique en présence d'ammoniac [2]. Il était donc intéressant d'établir le diagramme représentatif du système réciproque pour déterminer dans quelles conditions on arrive au phosphate disodique.

---

(1) Berzelius, *Gilbert Ann.*, 53, 1816, p. 393; 54, 1816, p. 31.

(2) Wigglesworth, Orlandi et Lévy, *E. P.*, 326814, 14 novembre 1928; F. Mitteau, *U. S. A. P.*, 1859835, 1932.

Cette étude a été faite à 0° et à 25° suivant les techniques habituelles : pour 0°, emploi d'un thermostat à glace pilée ; pour 25°, d'un thermostat à eau avec chauffage électrique et régulateur toluène mercure (constance de température : 0°,05). Les mélanges sont obtenus à partir des sels purs. Nous opérons avec un excès de phase solide en suivant les isothermes à deux sels. Nous atteignons ainsi les points univariants déterminés d'autre



part directement. Il faut quatre jours en moyenne pour atteindre l'équilibre. Le prélèvement de la phase liquide ne présente pas de difficultés, les solutions décantant rapidement. L'analyse comporte les déterminations des ions PO^{4---}, Cl^{-} et NH^{4+} ; l'ion Na^{+} et l'eau sont obtenus par différence. La précision des résultats dépasse 0,5 pour 100.

Résultats. — Nous n'indiquons ici que les chiffres relatifs aux points essentiels ; les concentrations sont exprimées en nombre d'ions ou de molécules de sel anhydre pour 1000^g d'eau.

Deux sels.

	T.				
A	0°	ClNa	4,89	$ClNH^4$	2,73
	25	ClNa	4,41	$ClNH^4$	3,85
B	0	$ClNH^4$	6,22	$PO^4H(NH^4)^2$	3,47
	25	$ClNH^4$	6,65	$PO^4H(NH^4)^2$	1,53
C	0	$PO^4H(NH^4)^2$	3,14	PO^4HNa^2	0,08
	25	$PO^4H(NH^4)^2$	5,14	PO^4HNa^2	0,14
D	0	$PO^4H(NH^4)^2$	0,48	PO^4HNa^2	0,25
	25	$PO^4H(NH^4)^2$	0,33	PO^4HNa^2	1,00
E	0	ClNa	5,95	PO^4HNa^2	»
	25	ClNa	5,70	PO^4HNa^2	0,50

Trois sels.

	T.	Na^+.	NH^{++}.	PO^4H^{--}.	Cl^-.
F	0°	4,90	2,80	0,08	7,55
	25	4,34	4,67	0,23	8,55
G	25	6,51	0,40	0,46	5,99
H	0	0,30	10,1	2,65	5,1
	25	0,45	9,04	1,64	6,21

Le diagramme présente cinq domaines distincts. Nous avons été amenés à déterminer les phases solides au microscope polarisant et par analyse pour un grand nombre de points situés sur les isothermes et à l'intérieur des domaines. Le sel double occupe à lui seul plus des trois quarts de la surface totale. Ce domaine s'élargit encore à 0°, la forme du diagramme (en pointillé) restant la même. Dans les deux cas il sépare ceux du chlorure d'ammonium et du phosphate disodique.

Suivant certains auteurs [(1) (3)] le phosphate double cristallise avec quatre ou cinq molécules d'eau. Nous avons trouvé par analyse directe des valeurs voisines de quatre et nous nous proposons de tirer ultérieurement au clair cette question.

(3) MELSMANN, *Arch. Pharm.*, 2e série, 99, 1859, p. 138.

CHIMIE GÉNÉRALE. — *Sur l'inflammation de l'éther propylique normal.* Note (1) de MM. **Jean Baron** et **Paul Laffitte.**

Nous avons déterminé, sous des pressions inférieures à une atmosphère, les températures d'inflammation de quelques mélanges éther propylique-air.

Nous utilisions la méthode statique et le pyromètre était un récipient cylindrique en verre pyrex de 12cm de longueur et de 2cm de diamètre intérieur. Le tableau suivant donne les températures d'inflammation ($t°$ C.) de quelques mélanges dont la concentration volumétrique en éther est indiquée dans la première colonne :

Concentration (%).	Pression (mm Hg) 600.	500.	400.	300.	200.
2	201°,5	204°,5	207°,5	210°,5	214°
3	193	196	200	204	209
4	188,5	192	196	201	208

Afin d'étudier l'influence de l'azote sur la température d'inflammation de l'éther propylique normal nous avons examiné les trois mélanges

$$2C^6H^{14}O + 8O^2 + 30N^2, \quad 2C^6H^{14}O + 8O^2 + 25N^2, \quad 2C^6H^{14}O + 8O^2 + 20N^2.$$

Le tableau ci-dessous montre l'influence de l'azote sur les températures d'inflammation des mélanges dont le rapport oxygène/éther est constant et égal à 4; p_O, p_E et p_N désignent respectivement les pressions partielles (mm Hg) de l'oxygène, de l'éther et de l'azote.

$p_O + p_E$: 50.		75.		100.		125.		150.	
p_N.	t (°C.).	p_N.	t (°C.).	p_N.	t (°C.).	p_N.	t (°C.).	p_N.	t (°C.).
100	204,5	150	201,5	200	198,5	250	197,5	300	196,5
125	203,5	187,5	200,5	250	198	312,5	197	375	196
150	202,5	225	199,5	300	197,5	375	196,5	450	195,5

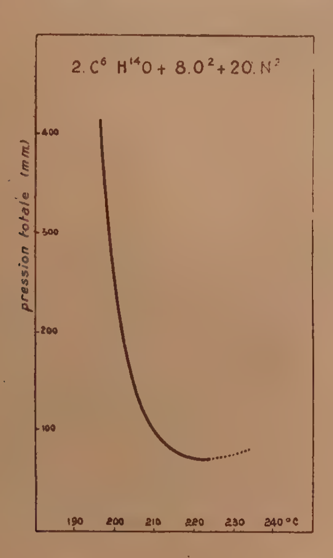
On voit que, comme dans le cas de l'éther éthylique (2), une addition d'azote à un mélange éther propylique-oxygène-azote abaisse sa tempéra-

(1) Séance du 4 avril 1938.

(2) J. Baron et P. Laffitte, *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 777; *Bull. Soc. Chim.*, **4**, 1937, p. 1271.

ture d'inflammation, en conformité avec la théorie des réactions en chaînes.

Les courbes pressions-température d'inflammation sont analogues à celles de l'éther éthylique, tout au moins dans leur première partie (voir la figure). En effet, les flammes étant beaucoup plus pâles, il nous



a été impossible de faire des mesures aux très basses pressions et de déterminer en particulier le point critique d'inflammabilité.

Les flammes sont d'un bleu très pâle et les retards à l'inflammation sont toujours inférieurs à 4 ou 5 secondes.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur l'hydrogénation des dérivés halogénés par le noir de platine.* Note de MM. **Gustave Vavon** et **Roger Mathieu**, présentée par M. Robert Lespieau.

On sait que l'on peut remplacer les halogènes des substances organiques par l'hydrogène en prenant comme catalyseur du palladium colloïdal [1] ou du carbonate de calcium palladié [2].

On peut également faire cette hydrogénation avec le noir de platine [3].

---

(1) Borsche et Heimbürger, *Berichte d. chem. Ges.*, 48, 1915, p. 452.

(2) Busch et Stove, *Berichte d. chem. Ges.*, 49, 1916, p. 1063.

(3) G. Vavon et J. Bolle, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1826.

L'éther, l'oxyde de butyle, l'acide acétique ne conviennent pas comme solvant : la réaction est lente et le plus souvent incomplète; l'alcool, au contraire, donne de bons résultats; il en est de même des mélanges hétérogènes : eau-éther, eau-oxyde de butyle ou eau-ligroïne.

Facilité relative d'hydrogénation de quelques dérivés halogénés. — La vitesse globale d'hydrogénation ne peut sur ce point renseigner de façon certaine ([1]), aussi avons-nous employé la technique suivante :

Sur le mélange d'un dérivé chloré et d'un dérivé bromé (une molécule de chacun), on fixe un peu moins de la moitié de l'hydrogène nécessaire à la réaction totale, soit $0^{mol},9$.

On dose chacun des hydracides formés, ce qui donne une mesure de la facilité relative d'hydrogénation des deux corps.

Le tableau ci-dessous donne les couples étudiés; le nombre qui figure en regard de chacun d'eux représente le rapport $\left[\frac{\mathrm{BrH}}{\mathrm{ClH}}\right]$.

I.	$C^6H^5-CHCl-CH^3$	+	$C^6H^5-CHBr-CH^3$	10
II.	»	+	$C^6H^5-CHBr-CO^2H$	≥ 50
III.	$CO^2H-CHCl-CO^2H$	+	$C^6H^5-CHBr-CH^3$	20
IV.	$C^6H^5-CHCl-C^6H^5$	+	$C^6H^5-CHBr-CO^2H$	35
V.	»	+	$C^6H^5-CHBr-CH^3$	3,5
VI.	»	+	$C^6H^5-CH^2-CH^2Br$	0,03
VII.	»	+	CH^2Br-CO^2H	0,25

Conclusions. — Les dérivés bromés s'hydrogènent beaucoup plus facilement que les dérivés chlorés correspondants (voir I et plus loin), C^6H^5 apporte une grande mobilité à l'halogène situé en α (cf. I et V, IV et VII, V et VI).

CO^2H agit de même mais à un degré moindre (cf. I et II, III et IV, IV et V, VI et VII).

Cette influence des groupes C^6H^5 et CO^2H est analogue à celle qu'on leur connaît pour d'autres réactions des dérivés halogénés (action sur l'iodure de potassium, sur les amines).

Dérivés dihalogénés $-CHX-CHX$. — Les expériences ont porté sur 6 dérivés dibromés et 2 dichlorés :

(1) $C^6H^5-CHBr-CHBr-CO^2H$,
(2) $C^6H^5-CHBr-CHBr-CO^2C^2H^5$,
(3) $C^6H^5-CHBr-CHBr-CONH^2$,
(4) $C^6H^5-CHBr-CHBr-COCH^3$,
(5) $C^6H^5-CHBr-CHBr-CH^3$,
(6) $CH^3-CHBr-CHBr-CO^2H$,
(7) $CO^2H-CHCl-CHCl-CO^2H$,
(8) $C^6H^5-CHCl-CHCl-CO^2H$.

([1]) G. Vavon, *Bull. Soc. Chim.*, **41**, 1927, p. 1269.

La courbe d'hydrogénation (temps-volume) des 4 premiers dérivés présente une cassure avec ralentissement net après fixation de H^2; cette cassure n'existe pas pour les corps (5) et (6); mais, pour les 6 dérivés dibromés, la première molécule d'hydrogène libère *les deux atomes de* Br sous forme d'acide bromhydrique et, si l'on arrête l'opération à ce moment, *on obtient le corps éthylénique*.

Le mécanisme de la réaction est donc le suivant :

$$C^6H^5-CHBr-CHBr-CO^2H + H^2 \rightarrow C^6H^5-CH{=}CH-CO^2H + 2HBr$$
$$C^6H^5-CH{=}CH-CO^2H + H^2 \rightarrow C^6H^5-CH^2-CH^2-CO^2H.$$

La molécule dibromée vient sur la surface du platine, perd 2 Br, *quitte le catalyseur, rentre dans la masse du solvant et revient s'hydrogéner plus tard, quand il ne reste plus ou ne reste que peu de molécules dibromées.*

Les dérivés dichlorés s'hydrogènent bien plus lentement que les dérivés dibromés de même structure. A chaque molécule d'hydrogène fixé correspond une seule molécule d'acide chlorhydrique; si l'on arrête l'expérience après absorption de H^2, *on ne peut isoler de dérivé intermédiaire*, on obtient un mélange du corps de départ et du corps complètement hydrogéné. Cette différence entre dérivés bromés et chlorés se rattache au fait bien connu que le brome organique est beaucoup plus mobile que ne l'est le chlore.

GÉOLOGIE. — *A propos de la chaîne calédonienne du Groenland septentrional.* Note [1] de M. VICTOR MADSEN.

Une Note de M. Lauge Koch [2] appelle des réflexions et des réserves.

D'abord, à la lecture de cette Note, on pourrait croire que, si dans le Groenland septentrional, il était connu des plissements, ce sont toutefois les voyages de M. Lauge Koch en 1916-1918 et 1920-1923 qui lui auraient permis d'y définir *une seule unité tectonique*. Cependant l'ouvrage et la carte de H. V. Feilden et C. E. de Rance, datant de 1878 [3], montraient déjà avec clarté *une région plissée venant du côté canadien à travers le Canal Robeson et se poursuivant dans le nord du Groenland*, et il n'y a pas de doute que ces auteurs aient reconnu cette zone plissée comme appartenant à *une*

---

(1) Séance du 28 mars 1938.
(2) *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1299.
(3) *Quart. Journ. Geol. Soc. London*, 34, 1878, p. 556-567, *Pl. XXIV*.

même unité tectonique sur les deux rives du Canal Robeson. En 1917, O. B. Bøggild ([4]) suggère la continuation de la chaîne vers l'Est, d'après la nature des sédiments métamorphiques, rapportés de l'est de la Terre de Peary, par l'expédition danoise de 1906-1908. Le mérite de M. Lauge Koch est d'avoir visité les régions intermédiaires et complété nos connaissances sur la zone plissée; mais celle-ci était connue avant lui et, pour s'en rendre compte, il suffit par exemple de voir ce qu'en dit Edouard Suess dans son ouvrage classique ([5]).

A propos de l'âge des plissements, M. Lauge Koch écrit (*loc. cit.*, p. 1300) que M. H. Frebold, *assisté de dix autres personnes*, l'accuse d'avoir emprunté certains de ses résultats à M. Bøggild. Il vaudrait mieux dire que personne n'a voulu mettre en doute sa priorité quant à l'âge calédonien de la chaîne plissée; on estime cependant ([6]) que les preuves sont très imprécises à l'appui de cette attribution chronologique.

M. Lauge Koch dit en effet (*loc cit.*, p. 1300) que les couches plissées comportent une série de sédiments *allant de la partie haute de l'Antécambrien (Groenlandien) au Gotlandien.* Or, dernièrement ([7]), il déclare que ces mêmes couches appartiennent *zum grösstem Teil Gotlandium*, contrairement aux terrains plissés de la côte est du Groenland, ceux-ci datant des *Spätkambrium, Kambrium und Ordovizium.* Cependant, entre les deux attributions, aucune exploration géologique n'est allée dans le nord du Groenland. Les autres publications de M. Lauge Koch fournissent encore d'autres attributions ([8]) et l'une d'elles ([9]), en fait de précisions, se borne à déclarer la présence de couches fossilifères dans la partie nord de la Terre de Hall; mais les fossiles n'ont jamais été rapportés et, par conséquent, aucun paléontologiste n'a été invité à en assurer la détermination exacte.

Quant aux horizons postérieurs au plissement, M. Lauge Koch dit, dans sa Note, qu'ils sont connus surtout dans les terres de Grant et de Grinnel; c'est parfaitement exact; mais ce qui l'est non moins, c'est que leur découverte est due à Feilden et de Rance et la détermination de leur âge, à d'autres auteurs, M. Lauge Koch ne cite ni les uns ni les autres.

([4]) *Handb. der region. Geologie*, 4, Heidelberg, 1917, p. 9.

([5]) *Der Antlitz der Erde*, 3, Wien-Leipzig, 1909, p. 283.

([6]) H. Frebold, *Medd. fra. Dansk Geol. Foren.*, 8, H. 4, Copenhague, 1934, p. 306-308; O. B. Bøggild and Others, *ibid.*, 8, H. 5, Copenhague, 1935, p. 502-503.

([7]) *Geol. Rundschau*, 27, Stuttgart, 1936, p. 14.

([8]) *Medd. fra. Dansk Geol. Foren.*, 5, H. 5, Copenhague, 1920, p. 17.

([9]) *Medd. om Grönland*, 73, n° 2, Copenhague, 1929, p. 280.

Enfin, la Note examinée indique (et c'est là une mention nouvelle dans la littérature géologique groenlandaise) que les sédiments du Ludlow et peut-être du Dowtonien sont devenus *une sorte de Flysch*. L'auteur avait dit par ailleurs ([10]), qu'avec une épaisseur d'environ 500^m, il s'agissait de *Coarse unbanded sandstone, occasionally containing slaty bands*... Il reste à souhaiter que des précisions soient apportées, notamment quant à la définition de ce faciès Flysch et quant à son âge, et que soient publiées les observations importantes, semble-t-il, rapportées par M. Lauge Koch de son voyage de 1920-1923 et dont il a privé jusqu'ici la science géologique.

GÉOLOGIE. — *A propos de l'Ozarkien au Groenland.* Note ([1]) de M. **Christian Poulsen.**

M. Lauge Koch ([2]) critiquant sur quelques points mon ouvrage à ce sujet ([3]), je suis obligé de faire remarquer que ni les faits ni les circonstances qu'il rappelle ne le sont conformément à la réalité. Au début, après avoir indiqué qu'au Groenland comme en Amérique, on a d'abord utilisé l'étage Ozarkien, il ajoute : « depuis lors les stratigraphes américains, en particulier Resser, le savant paléontologiste du Musée national des États-Unis, ont approfondi l'étude du problème, ce qui les a amenés à abandonner l'hypothétique étage Ozarkien ». Or aucun renvoi n'est indiqué aux ouvrages du Professeur Resser, et la raison en est bien simple : dans ses publications, ce savant américain n'a nullement renoncé à interpréter l'Ozarkien comme un étage.

Autre citation de M. Lauge Koch : « en automne 1935, j'ai été très étonné que M. Poulsen, assisté de quelques autres personnes, ait critiqué en termes excessivement vifs ma proposition que le terme d'Ozarkien ne pouvait être maintenu en ce qui concerne le Groenland ». La critique à laquelle il fait allusion portait sur un de ses ouvrages de 1935 ([4]) où il est dit notamment : « Nach Poulsens noch nicht veröffentlichten Untersuchungen finden sich in dem typisch amerikanisch ausgebildetem Ozarkiun

---

([10]) *Medd. fra Dansk Geol. Foren.*, 5, H. 5, 1920, p. 241.

([1]) Séance du 28 mars 1938.
([2]) *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 829 et suiv.
([3]) *Medd. om Grönland*, **70**, II, Copenhague, 1927.
([4]) *Geologie von Grönland*, 1935, p. 152, Berlin.

Ostgrönlands unterordovische Graptoliten. Diese zeigen, dass das Ozarkium in Zukunft als Formation nicht aufrecht erhalten werden kann ». On remarquera d'abord que M. Lauge Koch, dans sa Note de 1937, restreint son texte de 1935 sur l'Ozarkien, en y ajoutant : « en ce qui concerne le Groenland ». Il est de même singulier qu'il écrive « ma proposition » à propos de mes propres recherches qui ont reconnu des Graptolites de l'Ordovicien inférieur dans une formation considérée antérieurement comme de l'Ozarkien *supérieur*. Au surplus ces trouvailles n'engagent en rien la question de tout l'Ozarkien et ne peuvent se généraliser à l'Ozarkien *inférieur* et *moyen*.

M. Lauge Koch me met en cause à propos de la faune à *Clavaspidella* (niveau du Cap Frédéric VII). Il est exact que j'ai fait erreur dans la détermination de son âge et que je me suis « laissé guider par l'impression que ces formes avaient un habitus plus ou moins ozarkien et cambrien supérieur, mais une corrélation directe n'en est pas possible ». C'est exactement ce que j'ai écrit moi-même en 1927 (*loc. cit.*, p. 341). M. Lauge Koch pourrait le rappeler et je ne pouvais qu'avoir une attitude réservée, d'abord parce que la faune à *Clavaspidella* était alors nouvelle et inconnue dans d'autres régions, ensuite parce que M. Lauge Koch n'apportait pas d'informations suffisantes sur la position stratigraphique de la couche en question dans la série du nord du Groenland.

Quant au genre *Ptychoparella*, il n'est pas, comme le suggère M. Lauge Koch, « particulièrement distinctif de la partie haute du Cambrien supérieur ». Le professeur Resser m'a aimablement fait savoir que ce genre est très commun dans le Cambrien *inférieur* et dure dans le Cambrien *moyen*.

M. Lauge Koch rapporte le niveau de la Pemmican River au Cambrien *moyen*. Dans mon ouvrage de 1927 (p. 341), je le parallélise avec une couche de Mantana (U. S. A.) qui contient également le genre *Elrathiella*, dont l'âge n'était pas alors définitivement fixé (Cambrien supérieur ou Ozarkien inférieur). Un paléontologiste connu, F. W. Whitehouse, de Brisbane, a constaté depuis qu'un niveau du Cambrien supérieur du nord-est de l'Australie, l'*Elrathiella Stage*, caractérisé par ce genre, se trouve au-dessus des couches à *Glyptagnostus*, *Pseudagnostus*, *Proceratopyse* et *Olenus*. Dans l'*Elrathiella Stage* lui-même, on rencontre en outre des genres caractéristiques : *Aspidagnostus*, *Olenus? Pesaia?* et *Orusia* ([5]) et F. W. Whitehouse le parallélise avec le niveau scandinave à *Orusia lenticularis*,

([5]) *Mem. of Queensland Museum*, 11, Brisbane 1936, p. 77.

ce qui amène à rapporter le niveau de la Pemmincan River au Cambrien *supérieur*.

M. Lauge Koch donne, à la fin de sa Note, un tableau de « l'état actuel de la stratigraphie du Groenland septentrional ». Il y manque, à la base, le Précambrien et, au sommet, le Silurien (Gotlandien). Quant aux précisions qu'il fournit, le professeur Curt Teichert a montré qu'elles dépassent ce que permettent de dire les connaissances actuelles, et il fait remarquer qu'« une étude superficielle des différents rapports de M. Lauge Koch sur la géologie de la Terre de Washington pourrait nous porter à croire que la stratigraphie ordovicienne de cette région est mieux connue qu'elle ne l'est en réalité » (⁶).

Quant à mon opinion sur l'Ozarkien, je me bornerai à renvoyer à ce que j'ai écrit dans mon ouvrage antérieur (⁷), où j'ai montré que le niveau de Cass Fjord, considéré antérieurement comme Ozarkien supérieur, équivaut en réalité à la partie supérieure des schistes à *Dictyonema* de Scandinavie (Tremadoc), et où j'ai insisté sur le désir que soient révisées les faunes analogues de certains niveaux du Nord-Amérique afin qu'on ait une connaissance nette sur leurs positions stratigraphiques. Dans le même travail, j'ai dit aussi, expressément, que mes matériaux ne me permettaient pas de discuter sur le problème même de l'Ozarkien.

GÉOLOGIE. — *Sur le Précambrien de l'Anti-Atlas occidental.* Note de MM. **Georges Choubert** et **Louis Neltner**, transmise par M. Charles Jacob.

Le Précambrien forme dans l'Anti-Atlas des boutonnières au milieu du Cambrien; la plus importante est celle de Kerdous qui, sur plus 1500$^{km^2}$, s'étend du Jebel Lkst au Tazeroualt juste avant l'ennoyage de l'Anti-Atlas sous la plaine de Tiznit. J. Bondon, qui traversa rapidement la région en 1934, en a le premier reconnu l'importance sans avoir eu le temps de l'examiner en détail. Depuis, en 1936 et 1937, nous avons entrepris le levé géologique de ce pays.

Le Précambrien de Kerdous comprend des termes de métamorphisme nettement différent, mais le passage des uns aux autres se montre souvent

(⁶) Curt Teicher, *Medd. om Grönland*, 119, n° 1, 1937, Copenhague, p. 26.
(⁷) *Medd. om Grönland*, 119, n° 3, p. 65-68.

beaucoup trop continu pour qu'il y ait lieu de distinguer un Archéen et un Algonkien, comme cela a été fait en d'autres points de la chaîne. Les termes les plus modifiés comprennent des micaschistes et des granites passant aux orthogneiss à mica blanc, tandis que le sommet de la série n'offre guère que des quartzites peu ou pas métamorphiques, ne dépassant pas le stade de séricitoschistes et traversés par des roches vertes et des granites non tectonisés.

La répartition des quartzites et des schistes au sommet de la série n'est pas arbitraire et l'on peut ainsi reconnaître deux zones principales qui traversent la tache de Kerdous en direction sensiblement E W :

Au Nord, une zone néritique, caractérisée par une sédimentation gréseuse (quartzites presque uniquement); ces couches sont plissées par les mouvements algonkiens en plis vigoureux où les plis failles et les régimes en écailles ne sont pas rares. Elles constituent les reliefs du Lkst et de l'Imzi et s'ennoient au Nord sous les rhyolites et conglomérats du Géorgien. La largeur visible de cette zone est de 25 kilomètres environ; on suit son prolongement vers l'Est jusqu'aux plateaux du Draa à travers les taches algonkiennes déjà connues d'Alma, Aït Abdallah, Ida ou Zekri, Ida ou Zeddout, Jebel Iguiguil, etc.

Au Sud, une zone bathyale, caractérisée par une sédimentation très puissante exclusivement schisteuse; le métamorphisme général y est assez net sans toutefois dépasser le stade *epi* (schistes chloriteux et sériciteux parfois finement gaufrés). Ces schistes tendres forment les larges cuvettes pénéplainées du Tazeroualt et de Tiout et se suivent jusqu'aux environs d'Akka à travers la khela Tagragra; la largeur visible de cette zone est de 20 à 30 kilomètres.

Entre ces deux zones principales, on peut distinguer dans la région des Kerdous, deux sous-zones intermédiaires, celle d'Anzit-Tafraout et celle de Tighmi-Tifermi-Irchene.

La première, qui borde au Sud la zone du Lkst, montre une masse très uniforme de schistes verts peu ou pas métamorphiques; quelques rares passées gréseuses et un petit niveau de conglomérats à galets de granite (un peu à l'Est de Tahala) viennent seuls en rompre la monotonie. Au Nord, cette série repose directement sur les quartzites du Lkst mais, en dépit d'une tectonique violente, nul lambeau de quartzites n'affleure dans cette sous-zone. Aussi, bien qu'en toute rigueur on ne connaisse pas avec certitude le substratum de la série schisteuse, il semble très probable que les quartzites ne se sont pas déposés au mur de celle-ci. De même dans la

zone du Lkst, les divers plis ou accidents ne font jamais apparaître sous les quartzites des schistes, mais simplement des roches vertes. Il y a donc opposition très nette de faciès entre la zone du Lkst et celle d'Anzi-Tafraout qui se rattache déjà à la grande zone géosynclinale du Sud dont elle ne se distingue que par son métamorphisme faible ou nul.

Les quartzites par contre réapparaissent dans la seconde sous-zone qui, large de 4 à 5^{km}, s'étend d'Ighir Moussi et Tighmi à Tifermit et au pays des Irchene. Ils forment là deux niveaux assez constants; l'un, avec des quartzites massifs, peut atteindre une centaine de mètres de puissance; l'autre, moins épais, est plutôt constitué de schistes gréseux durs. Ces bancs très fragmentés et plissés donnent des crêtes ou sokhrats irréguliers de direction générale E.W. Des hauts fonds se sont donc individualisés par deux fois au moins entre la bande profonde d'Anzi-Tafraout et la grande zone géosynclinale du Sud.

Les granites intrusifs, si abondants par places, provoquent de beaux phénomènes de contact et cet ensemble granite-cornes, fortement tectonisé par endroits, fait penser à première vue à la présence d'une série archéenne, mais la continuité observée ailleurs s'oppose à cette interprétation.

Roches éruptives. — Elles sont de deux sortes, roches vertes et granites.

a. Roches vertes. — Ce sont des roches altérées, de composition pétrographique semblable (dolérites et gabbros), qui, à notre avis, forment une seule venue ayant accompagné ou suivi de très près les mouvements tectoniques. Elles apparaissent indistinctement dans toutes les zones sédimentaires définies plus haut et se rencontrent le plus souvent dans le cœur des anticlinaux ou les zones de broyage.

b. Granites. — Ils interviennent dans les zones de sédimentation schisteuses et appartiennent à deux venues différentes au moins. Les plus récents (Tafraout) ne sont pas tectonisés dans leur ensemble et donnent de magnifiques phénomènes de contact (très beaux phénomènes d'endo et exomorphisme chez les Irchene, gneiss d'injection de la haute vallée des Ammeln, schistes tachetés un peu partout en bordure...). Disposés par place sous les conglomérats géorgiens, ils sont indiscutablement antécambriens.

D'autres granites tectonisés d'une façon intense sont plus anciens encore (antérieurs aux principaux mouvements algonkiens). Souvent laminés et transformés en gneiss chloriteux, ils sont en tout cas privés de biotite par métamorphisme régressif; les plus beaux exemples sans doute,

et les plus faciles à voir, se rencontrent sur la khela Tasrhirt où ils accompagnent et injectent des bandes de schistes chloriteux et sériciteux qui, vers le Nord, passent en continuité à de l'Algonkien, de sorte que nous rattachons encore ces granites à l'Algonkien.

CYTOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur les ioduques de l'* Asparagopsis armata *Harvey*. Note (¹) de M. **Jean Feldmann** et Mlle **Geneviève Mazoyer**, présentée par M. Alexandre Guilliermond.

Quelques années après les observations de Sauvageau (²), H. Kylin (³), étudiant le *Falkenbergia Hillebrandii*, constata que les ioduques de cette espèce ne représentaient pas des vacuoles, comme l'avait cru Sauvageau, mais des cellules particulières, naissant à partir des cellules péricentrales et enchâssées par elles contre le siphon axial.

Nos observations nous ont permis de confirmer à ce sujet celles de Kylin.

Il était donc intéressant de rechercher si, dans le cas de l'*Asparagopsis*, il n'en serait pas de même, l'aspect des ioduques des ces deux espèces étant très semblable.

Les ioduques de l'*Asparagopsis armata*, comme ceux du *Falkenbergia*, sont très fragiles et se conservent assez mal par la fixation.

Néanmoins, après fixation d'une heure par le fixateur chromoacétique, dans l'eau de mer, et coloration par l'hémalum ou l'hématoxyline ferrique, il est possible d'observer les ioduques, ou tout au moins leur enveloppe, leur contenu ayant été détruit par le fixateur. Dans ces conditions, l'ioduque ne présente nullement l'aspect d'une vacuole et son enveloppe ressemble tout à fait à une membrane cellulaire comme celle des ioduques du *Falkenbergia*.

A l'extrémité des ramules, il est possible de distinguer, à l'intérieur des ioduques jeunes, un noyau pourvu d'un nucléole comme en a observé Kylin dans les jeunes ioduques du *Falkenbergia*. La potasse dissout lentement le contenu de l'ioduque sans le faire éclater. Après un séjour de plusieurs heures dans une solution de potasse, l'ioduque est entièrement vidé de son

---

(¹) Séance du 25 avril 1938.

(²) C. Sauvageau, *Comptes rendus*, **180**, 1925, p. 1887; *Bull. Stat. Biol. d'Arcachon*, 22, 1925, p. 12; *Comptes rendus*, **181**, 1925, p. 293.

(³) *Botaniska Notiser*, 1928, p. 233.

contenu, ainsi que les autres cellules de l'Algue. Il ne subsiste plus alors que les membranes et il est possible de mettre très nettement en évidence celles des ioduques par coloration par le rouge de ruthénium.

En résumé, les ioduques de l'*Asparagopsis armata* présentent absolument la même structure que ceux du *Falkenbergia Hillebrandii*. Ils sont constitués par une petite cellule spéciale enchâssée dans la grande cellule péricentrale et non par une simple vacuole, comme le croyait Sauvageau.

Il est assez curieux de constater l'identité de structure entre les ioduques des *Asparagopsis* et des *Falkenbergia*, puisqu'il s'agit de plantes considérées comme très éloignées les unes des autres, les premières étant placées dans les Némalionales et les autres parmi les Céramiales.

Les ioduques de l'*Asparagopsis armata* diffèrent par contre de ceux des *Bonnemaisonia* et en particulier de ceux du *Bonnemaisonia hamifera* Hariot, espèce qui a été rapportée par Okamura au genre *Asparagopsis* mais qui, par la structure de ses ioduques et par l'ensemble de ses caractères anatomiques, nous semble devoir être replacée dans le genre *Bonnemaisonia*.

CYTOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur l'existence du dicaryon chez un* Saccharomyces *isolé du vin*. Note de M. **Jean Renaud**, présentée par M. Alexandre Guilliermond.

Nous avons constaté la présence d'une phase dicaryotique, au début de la diplophase, chez un *Saccharomyces* isolé des vins blancs de Quincy (Cher).

Par ses caractères morphologiques et sexuels, cette levure montre une étroite parenté avec le *S. ellipsoideus* d'Hansen. Ensemencées sur moût de bière liquide, les cellules se multiplient d'abord exclusivement en dépôt en produisant une fermentation active. Après une quinzaine de jours, quelques granulations apparaissent à la surface du liquide, mais il ne se forme jamais de voile. En général, au cours du bourgeonnement, les cellules-filles restent accolées aux cellules-mères, suivant le bourgeonnement habituel; mais parfois elles s'en écartent, en restant en liaison par un isthme étroit, surtout visible sur les préparations cytologiques. Elles sont de forme elliptique et les types les plus courants mesurent ($9^{\mu} \times 6^{\mu}$) et ($9^{\mu},75 \times 6^{\mu}$) après trois jours de cultures à 25°. Quelques-unes, moins nombreuses, sont plus allongées ($12^{\mu} \times 6^{\mu}$). Nous avons obtenu une très bonne sporulation sur

milieu de Gorodkowa à 25°. Les asques renferment des ascospores rondes, au nombre de 1, 2, 3, 4 par asque et leur taille, en général, est de $3^{\mu},5$. Les ascospores germent très vite sur moût de bière gélosé et peuvent se conjuguer deux à deux ou former quelques cellules haploïdes. Dans ce cas, ce sont celles-ci qui se conjuguent et donnent naissance à des zygospores qui germent aussitôt. Le mode de sexualité est donc celui des Saccharomyces, bien connu depuis les travaux de Guilliermond. On obtient une fermentation totale sur glucose, lévulose, mannose, galactose, saccharose, maltose. Celle-ci est faible sur le raffinose et le lactose n'est pas attaqué. La colonie géante, sur moût gélatiné à 12 pour 100, présente



Fig. A. Zygospore dicaryotique : division du dicaryon vers la première cellule en formation.
Fig. B. Zygospore dicaryotique et dicaryon nettement individualisé sur les deux cellules filles.
Fig. C. Zygospore dicaryotique réunie à une chaîne de deux cellules filles à dicaryon.

quelques stries concentriques et des bords légèrement découpés. Elle est sensiblement différente de celle du *S. ellipsoideus*. Les caractères ci-dessus permettent de considérer notre levure comme une race de *S. ellipsoideus*.

Mais l'intérêt remarquable de ce Saccharomyces réside surtout dans les phénomènes cytologiques qui accompagnent sa sexualité. Après fixation au picro-formol et coloration à l'hématoxyline ferrique, on constate que, pour un grand nombre de zygospores, la caryogamie ne se réalise pas immédiatement après la fusion cellulaire. Les deux noyaux s'assemblent pour former un dicaryon, puis se divisent simultanément en direction du premier bourgeon en voie de croissance, par une sorte de mitose conjuguée dont nous étudierons plus tard les détails. La figure A reproduit un exemple typique de division conjuguée. Lorsque le dicaryon du premier bourgeon est formé, le plus souvent, les deux noyaux se fusionnent. Mais

parfois, la fusion n'a pas lieu et le dicaryon apparaît très nettement individualisé. La figure B en reproduit un remarquable exemple. Dans d'autres cas, le dicaryon peut s'étendre à la deuxième cellule ainsi qu'à la troisième et, assez fréquemment, dans nos préparations cytologiques, nous avons rencontré des chaînes de deux ou trois cellules binucléées. Il est plus rare d'observer, sur une même chaîne, les cellules dicaryotiques et la zygospore qui leur a donné naissance car, au moment de l'étalement sur lame, une fragmentation de la culture est inévitable. La figure C montre une zygospore réunie à une chaîne de deux cellules dicaryotiques.

La tendance à la formation d'un dicaryon, caractérisée par la présence de zygospores dicaryotiques, paraît assez fréquente chez les Levures du genre Saccharomyces. Elle a été remarquée pour la première fois par Güilliermond chez le *S. Johannisbergensis*, puis retrouvée par le même auteur sur le *S. paradoxus*. Nous avons de même signalé des phénomènes analogues, chez une autre race isolée du vin. Toutefois, la présence d'un dicaryon nettement installé dans les cellules de la diplophase n'avait jamais été décrite, et nos observations prennent un intérêt particulier lorsqu'on les rapproche de celles faites par Mlle Wieben, sur les Exoascées du type *Taphrina epipylla*. On sait que ces champignons sont capables de former des asques comparables à ceux des Saccharomyces, et de présenter une sexualité analogue au moment de la germination des ascospores. La seule différence, entre les deux groupes, consistait en ce que, chez les Exoascées, les zygospores donnent naissance à des myceliums dicaryotiques. Mais cette différence s'atténue notablement avec le Saccharomyces que nous venons d'isoler, dans lequel, nous l'avons vu, il peut se produire plusieurs générations de cellules dicaryotiques. Les cycles de développement de ces deux types de champignons sont donc homologables et l'hypothèse de Guilliermond, relative au rapprochement des Levures et des Exoascées, reçoit une confirmation complète.

HISTOCHIMIE VÉGÉTALE. — *Sur la présence de la thymine dans l'acide nucléique extrait de la Levure. Recherches cytologiques et chimiques.* Note de Mlles **Berthe Delaporte** et **Nadia Roukhelman**, présentée par M. Alexandre Guilliermond.

Les nombreuses recherches faites sur les acides nucléiques ont conduit à admettre que les végétaux contenaient un acide nucléique (acide zymonu-

cléique) différent de celui trouvé dans les divers tissus animaux (acide thymonucléique). Feulgen a remarqué qu'à la suite d'une hydrolyse ménagée l'acide thymonucléique recolore *in vitro* le réactif de Schiff, tandis que l'acide zymonucléique le laisse incolore. Or les études cytologiques ultérieures faites au moyen de la réaction nucléale de Feulgen ont montré que les noyaux des cellules animales et végétales se colorent en rouge violacé après hydrolyse; ils contiendraient donc de l'acide thymonucléique. Cette conclusion est en opposition avec celles tirées à la suite des extractions chimiques. Mais tout récemment Feulgen, Behrens et Mahdihassan [1] ont extrait l'acide thymonucléique de germes de seigle après un broyage extrêmement fin de ce matériel.

Sans avoir pu le démontrer, certains auteurs pensent que les corpuscules métachromatiques des Levures renferment de l'acide nucléique. Il était donc très intéressant de faire des extractions d'acide nucléique de Levures tout en localisant autant que possible le lieu d'où cet acide avait été retiré.

L'une de nous ayant remarqué qu'après l'application des techniques courantes pour l'extraction de l'acide nucléique de la levure, le noyau de la presque totalité des cellules paraît intact et donne très nettement la réaction nucléale de Feulgen, alors qu'on ne voit plus de corpuscules métachromatiques, nous avons cherché à retirer seulement ces derniers. Des lavages réitérés, à l'eau pure ou additionnée de traces de bicarbonate de soude (0,02 pour 100, pH 7,8), permettent de retirer la métachromatine alors que les cellules sont encore bien vivantes. De ces eaux de lavage concentrées nous avons extrait une substance que nous avons reconnue être de l'acide zymonucléique. Cet acide donne un anneau bleu outremer pur par la réaction au β-naphtol sulfurique de Thomas, ne recolore pas le réactif de Schiff *in vitro* selon la méthode de Feulgen (réactions données par un acide à ribose) et, après hydrolyse par l'acide sulfurique à 25 pour 100, on peut en extraire la cytosine et l'uracile. Les frottis faits avec les cellules ayant subi ces lavages, et traités par la réaction nucléale de Feulgen, montrent dans toutes les cellules le noyau franchement coloré en rouge violet.

En traitant alors la levure complètement débarrassée des corpuscules métachromatiques par les procédés classiques d'extraction de l'acide nucléique du thymus on obtient un précipité floconneux et collant donnant un anneau rouge brun par la réaction au naphtol sulfurique, recolorant *in vitro* le réactif de Schiff après hydrolyse, caractères de l'acide nucléique

---

(1) *Zeits. f. phys. Chem.*, **246**, 1937, p. 203.

à ribodésose. De ce produit, hydrolysé par l'acide sulfurique à 25 pour 100 dans les mêmes conditions que l'autre acide nucléique nous avons extrait, par les méthodes ordinaires pour obtenir la thymine, des cristaux dont l'oxydation par la technique de Baudisch nous a donné de l'urée et de l'acide pyvurique; nous avons caractérisé ce dernier par la 2.4-dinitrophénylhydrazine. L'une de nous a constaté qu'après cette extraction les cellules de levure ne donnent plus aucune coloration par la réaction nucléale de Feulgen.

Tant que le noyau donne la réaction nucléale malgré les différents traitements chimiques, il n'y a pas de trace d'acide thymonucléique dans les substances extraites; la disparition de cette réaction coïncide avec l'apparition de l'acide thymonucléique dans la substance extraite. De ces observations nous pensons pouvoir conclure qu'il y a de l'acide zymonucléique, jusqu'à présent le seul acide nucléique extrait de la levure, dans les corpuscules métachromatiques, tandis que de l'acide thymonucléique se trouve dans le noyau. Ces faits laisseraient donc supposer que les cellules végétales seraient construites sur le même type que les cellules animales, l'acide thymonucléique étant localisé dans le noyau et les acides nucléiques à ribose se trouvant en dehors du noyau : acide zymonucléique dans la levure et les germes de céréales, polynucléotides dans le pancréas, mononucléotides dans le muscle etc. Il serait intéressant de résoudre cette question.

Les divers détails techniques ainsi que les recherches actuellement en cours sur les Bactéries feront l'objet d'un prochain travail.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Production expérimentale de bourgeons sous l'effet des hétéro-auxines*. Note (¹) de M. **Pierre Chouard**, présentée par M. Louis Blaringhem.

Les auxines et hétéro-auxines, hormones de croissance des plantes supérieures, douées aussi du pouvoir d'exciter la formation des racines, sont considérées comme inhibitrices du développement des bourgeons à la suite des travaux de Thimann et Skoog, de Müller, Le Fanu etc. (²), portant

(¹) Séance du 2 mai 1938.

(²) K. V. Thimann et F. Skoog, *Proc. Nat. Ac. of Sc.*, **19**, 1933, p. 714, et **20**, 1934, p. 317; A. M. Müller, *Jahrb. Wiss. Bot.*, **81**, 1935, p. 497; B. Le Fanu, *Contr. Boyce Th. Inst.*, **7**, 1935, p. 205.

sur le Pois, la Fève etc. Néanmoins, un travail récent de A. Vegis (³) montre la poussée des hibernacles de *Stratiotes* excitée par l'hétéro-auxine; mais il ne s'agit que de l'éveil de bourgeons dormants déjà préformés.

Dans mes expériences, au contraire, j'assiste à la formation *de novo*, puis au développement complet de bourgeons, provoqués à volonté au point désiré, sur des feuilles, par l'application de doses juste convenables d'hétéro-auxines, c'est-à-dire de substances chimiquement définies.

J'ai réussi sur deux espèces, dont voici les propriétés normales :

Les fragments de feuilles de *Begonia Rex* Putz, longuement étudiés par Bouillenne et Prévot (⁴), ne produisent normalement bourgeons et racines qu'au pôle proximal (ou basal). Parfois, des bourgeons apparaissent au pôle distal (ou apical) dans des conditions particulières : immersion de ce pôle dans l'eau, anaérobiose partielle, fumure de la plante à la colombine.

Les feuilles d'*Alloplectus Lynchii* Hook (Gesnéracée), que j'étudie depuis 1932 (⁵), ont une polarité de bouturage encore plus strictement localisée au pôle proximal.

Déjà, en 1937, une de mes élèves, Mlle G. Haure (⁶), a obtenu parfois sur *Alloplectus* la poussée de bourgeons au pôle distal par application de lanoline chargée d'hétéro-auxine. Mais, cette année, j'ai obtenu des résultats constants sur les deux espèces par l'emploi de la technique suivante :

Les feuilles, ou leurs fragments, incisés ou non au pôle distal, sont plongés pendant 24 heures dans des solutions aqueuses d'hétéro-auxines, soit par la base, soit par le sommet, puis placés en étuve éclairée, soit la base ou le sommet dans l'eau, soit couchés en boîte de Petri humide.

L'*acide indol-3 acétique*, à la dose de 16^{γ} par centimètre cube, s'il est pompé par le pôle apical, est ensuite transporté au pôle basal selon les règles de la circulation polarisée des auxines, surtout si la feuille est maintenue couchée et non renversée, de sorte que des racines plus abondantes que sur les témoins, puis des bourgeons normaux, apparaissent en 20 à 30 jours au pôle proximal.

Mais si la dose est plus forte, 50^{γ} par centimètre cube par exemple, le transport polarisé est fortement altéré; et les racines apparaissent au voi-

---

(³) *Latvijas Biol. Bied. Rakstí*, **7**, 1937, p. 87.

(⁴) *C. R. Soc. Biol.*, **111**, 1932, p. 639; P. Prévot, *ibid.*, **120**, 1935, p. 798, **121**, 1936, p. 884; et *Bull. Soc. Roy. Sc. de Liège*, **6**, 1937, p. 428.

(⁵) *Mélanges dédiés au Prof. L. Daniel*, Rennes, 1936, p. 487.

(⁶) *Dipl. d'ét. sup.*, Fac. Sc. de Bordeaux, 13 novembre 1937.

sinage du pôle distal. Jusqu'ici, cette observation reste conforme aux règles d'altération de la polarité établies par Hitchcock, F. Went, etc. (7), dans le cas de fortes doses d'hétéro-auxines, et retrouvées dans les récentes publications de J. Lefèvre (8). Mais ce qui semble nouveau, c'est l'apparition concomitante de nombreux bourgeons, formés *de novo* au pôle distal, et localisés de préférence aux points d'entrée de l'hormone, près de la section des nervures, ou des stomates aquifères ayant plongé dans la solution.



A gauche, deux feuilles d'*Alloplectus Lynchii*, traitées le 1er mars 1938 par 50γ par centimètre cube d'acide indol-3 acétique et photographiées le 8 avril. Bourgeonnement et enracinement soit au pôle apical, soit en amont du pôle basal, selon que le traitement a été appliqué à la pointe ou à la base. — *A droite*, deux fragments de feuilles de *Begonia Rex*, traitées le 30 mars, et photographiées le 27 avril : mêmes résultats.

Si la dose est encore plus forte, 150γ par centimètre cube, ou bien s'il s'agit d'*acide indol*-3 *butyrique* à 50γ par centimètre cube, la poussée de racines du pôle apical est beaucoup plus abondante, mais la formation de bourgeons est alors retardée ou même inhibée.

Si les hormones sont pompées au pôle basal, elles y déterminent une prolifération de racines en rapport avec leurs concentrations. Mais si les racines formées ne sont pas excessivement abondantes, c'est-à-dire avec 50γ par centimètre cube d'acide indol-3 acétique par exemple, la formation de

(7) F. W. Went, *Biol. Zentralbl.*, **56**, 1936, p. 449.
(8) *Comptes rendus*, **205**, 1937, p. 83, et **206**, 1938, p. 1040.

bourgeons, loin d'être inhibée, est entraînée le long des nervures et du bord des feuilles, plus ou moins loin en amont du pôle proximal.

Il semble que ce soit ici la première fois où la néo-formation de bourgeons soit mise en rapport avec l'application de substances chimiquement définies, et en particulier d'hétéro-auxines, et où il soit aussi facile de modifier à volonté la polarité du bouturage des feuilles.

EMBRYOGÉNIE VÉGÉTALE. — *Embryogénie des Illécébracées. Développement de l'embryon chez le* Scleranthus perennis *L.* Note de M. **René Souèges**, présentée par M. Pierre-Augustin Dangeard.

Pour bien suivre tous les termes du développement de l'embryon du *Scleranthus perennis*, on se reportera à mes précédentes publications sur le *Sagina procumbens* (¹). Les descriptions, très précises et très détaillées, dont cette dernière espèce a été l'objet, pourraient être reproduites à peu près textuellement au sujet du *Scleranthus perennis*.

La cellule basale, *cb*, du proembryon bicellulaire (*fig.* 1) se convertit directement en une vésicule haustoriale et ne joue aucun rôle dans la construction de l'embryon. Les lois embryogéniques sont seules applicables à la cellule apicale. Cette cellule donne deux cellules superposées, *cc* et *cd* (*fig.* 2), puis, à la 2ᵉ génération, une tétrade linéaire (*fig.* 3) et, à la 3ᵉ génération, un proembryon octocellulaire à cinq étages, *l*, *l'*, *m*, *n* et *n'* (*fig.* 4 et 5), toutes formes identiques à celles que l'on rencontre chez le *Sagina procumbens*. A la 4ᵉ génération, la cellule *n*, au lieu de se segmenter verticalement, se divise transversalement et donne deux éléments superposés *h* et *k* (*fig.* 5 à 7). Le proembryon à 16 cellules ainsi constitué rappelle très exactement celui du *Chenopodium Bonus-Henricus* (*fig.* 8) (²).

Comme chez le *Sagina procumbens* et par des processus de division tout à fait identiques, les deux étages *l* et *l'* du proembryon donnent naissance, le premier à un tissu épiphysaire ou au point végétatif de la tige, le second à la partie cotylée proprement dite. Dans l'étage *m*, les premières cloisons, verticales, isolent le dermatogène (*fig.* 9, 10); puis, dans les quatre cellules intérieures, d'autres cloisons verticales séparent extérieurement des éléments de périblème (*fig.* 11, 12). C'est dans les nouvelles cellules circumaxiales que se différencient, par formation de parois transversales, les initiales de l'écorce de la racine en bas et, en haut, les premiers éléments de plérome (*fig.* 13). Chez le *Sagina procumbens*, les initiales de l'écorce de la racine s'individualisent plus tôt, aux dépens des quatre cellules intérieures apparaissant après séparation du dermatogène.

(¹) *Comptes rendus*, 175, 1922, p. 709 et 894; *Bull. Soc. bot. Fr.*, 71, 1924, p. 590.

(²) R. Souèges, *Comptes rendus*, 170, 1920, p. 467; *Bull. Soc. bot. Fr.*, 67, p. 233.

La cellule *h* (*fig.* 8) se comporte dans ses processus de division comme la cellule *n*, sa mère, chez le *Sagina procumbens*, et comme la même cellule *h* chez le *Chenopodium Bonus-Henricus*. Elle engendre la portion médiane de la coiffe (*fig.* 9 à 18). Quant aux éléments *k*, *o* et *p* (*fig.* 8), ils contribuent à l'édification d'un filament suspenseur de 5 à 7 éléments aplatis, reliant la vésicule haustoriale à l'embryon proprement dit (*fig.* 9 à 16).

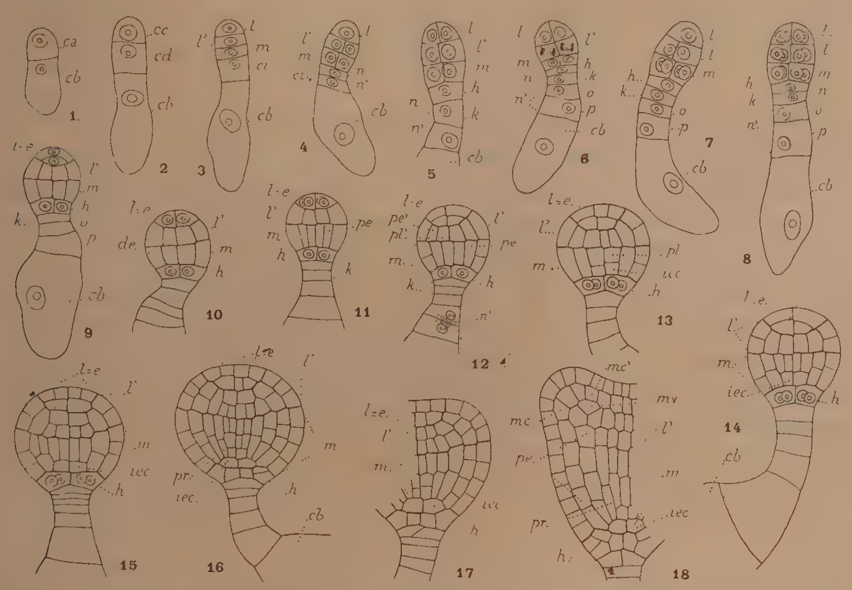


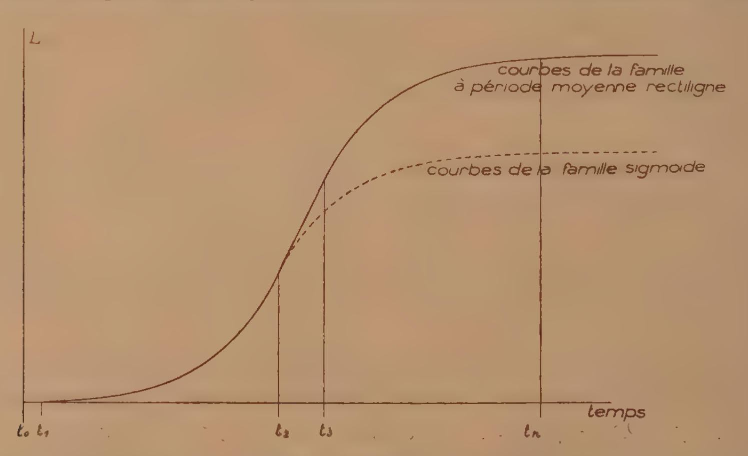
Fig. 1 à 18. — *Scleranthus perennis* L. — Les principaux termes du développement de l'embryon. *ca* et *cb*, cellule apicale et cellule basale du proembryon bicellulaire; *cc* et *cd*, cellules filles de *ca*; *l*, cellule fille supérieure de *cc* ou épiphyse *e*; *l'* cellule fille inférieure de *cc* ou partie cotylée proprement dite; *m*, cellule fille supérieure de *cd* ou partie hypocotylée; *ci*, cellule fille inférieure de *cd*; *n* et *n'*, cellules filles de *ci*; *h*, cellule fille supérieure de *n* ou portion médiane de la coiffe; *h*, cellule fille inférieure de *n*; *o* et *p*, cellules filles de *n'*; *de*, dermatogène; *pe*, périblème; *pl*, plérome; *iec*, initiales de l'écorce de la racine; *pr*, péricycle; *mc* et *mc'*, méristème cortical externe et interne, et *mv*, méristème vasculaire du cotylédon. G. = 310.

En somme, en comparant très étroitement l'histoire embryogénique du *Scleranthus perennis* à celle du *Sagina procumbens*, deux différences, qui se sont montrées très constantes, peuvent être relevées. Elles résident dans la différenciation, plus tardive chez la première espèce, des initiales de l'écorce de la racine et dans l'individualisation, plus tardive également, de la cellule qui donne naissance au primordium de la coiffe. Mais ce sont là deux caractères différentiels secondaires; les lois du développement sont, dans leurs traits essentiels, identiques chez les deux espèces; celles-ci

appartiennent, de toute évidence, au même type embryonomique. Se trouve, par conséquent, pleinement fondée l'opinion des auteurs qui font entrer les *Scleranthus* dans la famille des Caryophyllacées.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur la mise en évidence de constances remarquables dans le régime de croissance des germinations des pollens.* Note de M. **Jean Cuzin**, présentée par M. Louis Blaringhem.

La technique de culture *in vitro* des germinations polliniques qui a été mise au point au cours de mes recherches, a permis d'étudier sur ce matériel l'allongement des tubes polliniques en fonction du temps. Sans insister sur le dispositif de culture et de mesure, je n'apporte ici que les conclusions partielles qui se réfèrent au pollen de *Camellia Japonica* var. Arboretum Allard, étudié de janvier à avril 1936. Un procédé de culture donnant des résultats homogènes et un montage optique permettent de suivre la marche de la croissance sur un écran gradué pour en donner une représentation graphique. Si l'on appelle t_0 l'instant de la mise en culture, la croissance du tube pollinique débute après un certain intervalle de temps en t_1 (figure).



A partir de cet instant, les courbes relevées affectent la forme générale en S, caractéristique des courbes de croissance, et présentent un stade d'inflexion soit réduit à un point (courbes sigmoïdes), soit au contraire étiré en une portion de droite qui peut prendre toutes les valeurs à partir de o (courbes à période moyenne rectiligne).

Le régime de croissance est donc défini : *a.* par la *valeur du temps de latence* $t_0 - t_1$; *b.* par le *stade moyen* des graphiques dont on peut considérer d'une part la *valeur*, d'autre part la pente ou *coefficient angulaire*.

Les variations relevées sur les graphiques sont susceptibles d'être interprétées comme modales, l'allure générale de la croissance restant constante. Cette constance a été rapportée à un groupe de déterminations intrinsèques que je propose de mettre en relation avec la valeur du *stade moyen* $t_2 - t_3$, qui définit l'individualité spécifique de la culture. Les *coefficients angulaires* d'autre part, ainsi que la *valeur du temps de latence*, se sont montrés fonction de la teneur du milieu de culture en saccharose, dont nous avons étudié la variation, les autres facteurs étant maintenus constants.

Le temps de latence varie proportionnellement à la teneur en saccharose du milieu de culture, devenant infini pour une teneur-limite supérieure. Il existe pour un pollen donné une concentration optima pour laquelle le coefficient angulaire du stade $t_2 - t_3$ passe par un maximum qui paraît spécifique.

D'ailleurs on n'arrive pas à réaliser *in vitro* les longueurs de tubes polliniques qui sont exigées pour arriver aux ovules par la dimension des styles correspondants. A l'examen des courbes de croissance, les cultures semblent périr par inanition; la *quantité* des réserves, apportées par les pollens, leur *qualité*, et leur *degré d'utilisation* sont traduites sur les courbes par la valeur du stade $t_2 - t_3$ dont la prolongation est amenée *in vivo* par l'apport d'aliments sécrétés ou seulement véhiculés par le tissu stylaire; on peut la rechercher *in vitro* dans une adaption qualitative du milieu de culture. Il semble avéré en tout cas que le saccharose fourni aux cultures ne constitue pas à lui seul un aliment pour les germinations polliniques; il se bornerait, en leur fournissant l'eau sous un régime approprié entre certaines limites de concentration, à déclencher l'utilisation des réserves propres du grain de pollen.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur la composition comparée des spores et des pollens des plantes vasculaires.* Note de Mme **Cécile Sosa-Bourdouil**, présentée par M. Louis Blaringhem.

Dans des études antérieures, les analyses du pollen ont porté sur une dizaine de familles d'Angiospermes, représentées par un nombre plus

considérable d'espèces. J'ai souligné [1] la fixité relative des proportions centésimales de carbone et hydrogène qui oscillent pour les cas étudiés de 50 à 53,5 pour le carbone et de 7 à 7,7 pour l'hydrogène; quant à la teneur en azote l'étendue des variations est beaucoup plus importante, et l'on a trouvé des chiffres allant de 4 à 8 pour 100, limites présentées d'ailleurs par des espèces de la seule famille des Renonculacées.

De nouvelles recherches, effectuées sur les Gymnospermes, confirment la stabilité relative de la composition du pollen en C et H, les proportions étant voisines et généralement supérieures à 50 pour 100 de C et 7 pour 100 de H chez les Conifères. Ces proportions sont notablement inférieures à ces valeurs pour le *Ginkgo biloba*, plante classée au voisinage des Conifères, mais aberrante avec des particularités de fécondation qui la rapprochent des *Cycas*.

Les chiffres suivants ont été trouvés pour les Gymnospermes :

	C.	H.	N.
Ginkgo biloba	47,9	6,8	4,6
Taxus baccata	48,9	6,8	1,7
Araucaria Bidwillii	49,3	6,9	2,3
Pinus canariensis	53,3	7,3	1,9
Pinus banksiana	50,5	7,0	3,4
Abies numidica	50,8	7,6	4,2
Abies cephalonica	50,0	7,0	3,3

Pour les spores des Cryptogames vasculaires, les quelques analyses effectuées nous font voir que la composition en C, H et N est loin d'être homogène. Par exemple

	C.	H.	N.
Driopteris satigera	62,3	8,1	0,9
Aspidium filix mas	62,6	8,3	1,8
Selaginella caulescens			
» microspores	54,6	6,7	1,9
» macrospores	54,4	6,9	1,8

Nous retenons le fait que microspores et macrospores de Selagiginelle ont des compositions semblables, et d'ailleurs assez différentes des spores des Fougères proprement dites pour qu'on soit obligé de les considérer à part.

D'autre part les Lycopodes contiennent plus de 68 pour 100 de carbone et 10 pour 100 d'hydrogène; la teneur en azote est assez faible (1,4 pour 100).

Les spores des Cryptogames vasculaires ont donc des compositions

(1) *Comptes rendus*, **204**, 1937, p. 997, et **205**, 1937, p. 337.

variées non seulement en ce qui concerne la teneur en azote, mais aussi pour la teneur en carbone et hydrogène. Ce dernier fait les oppose nettement aux pollens de Phanérogames dont on a remarqué la grande homogénéité de composition en ces éléments. De plus, ces spores sont en général notablement plus pauvres en azote que les pollens, surtout si on les compare aux pollens d'Angiospermes, pour lesquels aucun des chiffres obtenus ne descend au-dessous de 4 pour 100, alors que certaines Gymnospermes donnent des valeurs qui tendent vers celles trouvées pour les Cryptogames vasculaires (2,3; 1,9; 1,7).

En résumé, les analyses relatives à la teneur en carbone et hydrogène permettent d'établir des différences notables entre les spores de divers genres de Cryptogames vasculaires, alors que les mêmes analyses des pollens de nombreux genres de Phanérogames montrent des oscillations trop faibles pour qu'on en tire des renseignements sur les particularités des familles auxquelles ils appartiennent.

La teneur en azote, dans les analyses que nous avons faites, reste avec des variations marquées, à un taux notablement inférieur à celui de l'ensemble des Angiospermes, les Gymnospermes étudiées donnant quelques valeurs se répartissant dans l'intervalle constaté entre les Cryptogames vasculaires et les Angiospermes.

PHARMACOLOGIE. — *Action du zinc sur les effets œstrogènes de la folliculine chez la rate ovariectomisée.* Note de M. **Raymond Cahen** et Mme **Andrée Tronchon**, présentée par M. Maurice Javillier.

On sait l'influence qu'exercent certains ions métalliques sur des phénomènes diastasiques et l'activité de substances vitaminiques. On peut se demander si cet effet synergique n'est pas susceptible de s'exercer également pour les hormones; cette supposition est d'autant plus fondée que des travaux récents ont montré l'influence des divers sels sur l'action de l'insuline, de l'adrénaline [1], des hormones gonadotropes préhypophysaires et sur la fonction reproductrice [2].

---

(1) Scott et Fischer, *J. of Pharmacol.*, 55, 1935, p. 206; *ibid.*, 58, 1936, p. 78; E. M. Bavin et W. A. Broom, *Quart. Journ. Pharm.*, 10, 1937, p. 327; D. Broun et H. Schwab, *Paris médical*, 27, 1937, p. 212; H. Handovsky, *Arch. intern. Pharm.*, 49, 1934, p. 231; H. Schwab, *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 628; L. C. Maxwell, *Amer. Journ. Physiol.*, 110, 1934, p. 458.

(2) Gabriel Bertrand, *Bull. Soc. Chim.*, 18, 1936, p. 222.

La présente Note a pour objet l'action modificatrice du zinc vis-à-vis des effets de la folliculine chez la rate pubère ovariectomisée, d'une part, en ce qui concerne l'intensité des effets œstrogènes, d'autre part, pour ce qui est de leur durée.

1° *Intensité des effets œstrogènes.* — Deux séries d'expériences ont été réalisées. Dans une première série (série I), un groupe de 19 animaux (A) servant de témoins a reçu par voie hypodermique, la folliculine étalon en solution aqueuse, à la dose de $2^{\gamma}.4$ par animal, en quatre injections à 12 heures d'intervalle; cette dose a été choisie parce qu'elle se montre active pour les animaux de notre élevage dans 50 pour 100 des cas. A un autre groupe de 18 rats (B) aussi voisins que possible des précédents, on a injecté une même dose de folliculine et simultanément une quantité de $1^{mg}.5$ de zinc (sous forme de Cl^2Zn) par 100^g d'animal, cette dose étant elle-même administrée en deux injections sous-cutanées.

Les essais ont été répétés en inversant l'administration des produits suivant la méthode dite *croisée* qui offre l'avantage de diminuer l'influence des variations de la sensibilité individuelle des animaux ([3]). Nous avons donc administré à huit jours d'intervalle aux animaux du lot A, d'abord la folliculine seule, puis la folliculine et le zinc, alors que les animaux du lot B recevaient inversement l'association folliculine-zinc, puis la folliculine seule.

Les résultats des expériences sont les suivants : la folliculine additionnée de zinc manifeste une activité œstrogène accrue de 37 pour 100 par rapport à la folliculine injectée seule. Dans les mêmes conditions le zinc injecté seul chez un autre groupe d'animaux n'exerce aucun effet œstrogène. Cependant, le renforcement des effets de la folliculine par le zinc ne s'observe que si le rapport zinc-folliculine est égal ou supérieur à une valeur déterminée. En effet, dans une seconde série d'expériences (série II) effectuée sur 52 animaux, avec une dose plus forte de folliculine ($2^{\gamma},7$) et une quantité de zinc identique ($1^{mg},50$) ou inférieure à celle du premier essai ($0^{mg},15$-$0^{mg},75$), on ne constate aucune modification des effets œstrogènes de la folliculine par le zinc. Au contraire, si l'on utilise 3^{mg} de zinc pour cette dose de $2^{\gamma},7$ de folliculine, l'activité œstrogène augmente de 28 pour 100.

2° *Durée des effets œstrogènes.* — L'examen du frottis vaginal, effectué 4 jours après la première injection, permet de noter un réaction franche-

([3]) R. Cahen, *Congrès Inter. Union Ther. Berne*, 19 mai 1937.

ment positive (présence presque exclusive de cellules kératinisées) dans une proportion de 27 pour 100 des cas, lorsque la folliculine ($2^{\gamma},4$ et $2^{\gamma},7$) est associée au zinc ($1^{mg},5$ et 3^{mg}), tandis que cette proportion s'abaisse respectivement à 8 et 10 pour 100 pour les mêmes doses de folliculine employée seule ($2^{\gamma},4$ et $2^{\gamma},7$). Au contraire, cette prolongation de la durée des effets œstrogènes ne s'observe pas lorsque la dose de $2^{\gamma},7$ de folliculine est associée seulement à $0^{mg},75$ et $1^{mg},50$ de zinc.

Conclusions. — 1° Le chlorure de zinc accroît l'intensité et prolonge la durée des effets œstrogènes de la folliculine chez la rate ovariectomisée.

2° Pour réaliser ce renforcement des effets de la folliculine, il est nécessaire que le zinc soit associé à cette hormone dans certaine proportion, qui ne doit pas être inférieure à $1^{mg},50$ de zinc pour $2^{\gamma},4$ de folliculine et à 3^{mg} de zinc pour $2^{\gamma},7$ de folliculine.

EMBRYOGÉNIE EXPÉRIMENTALE. — *Sur le mécanisme des déviations sexuelles dans une femelle génétique à la suite* : a. *de testostérinisation ;* b. *du free-martinisme ;* c. *des tumeurs de la surrénale* (*virilisme*). Note de Mme **Véra Dantchakoff**, présentée par M. Maurice Caullery.

Le traitement de l'embryon de cobaye par la testostérone évoque dans l'embryon femelle une masculinisation très prononcée ; une hypermasculinisation dans l'embryon mâle et une précocité sexuelle extraordinaire dans les deux. Dernièrement, un cobaye traité systématiquement, mâle extérieurement, manifestait, à deux semaines, tout le comportement mâle, y compris des essais incessants de coït. Une laparotomie, pratiquée à quatre semaines, prouva que c'était une femelle génétique. L'histogenèse sexuelle et la structure acquise des organes, chez de tels animaux, est semblable à celles que la nature réalise, quant à l'édification du sexe mâle, dans son expérience des free-martins (étudiés par Lillie, Keller et Tandler 1916, Chapin 1917, Willier 1921, Bissonette 1924, Hughes, 1929), et dans le virilisme, objet de nombreuses études, dont un aperçu très complet a été donné par Berner.

Les effets obtenus par la *testostérinisation* de l'embryon femelle témoignent d'une *réceptivité particulière* d'un groupe spécial de tissus embryonnaires à déterminisme génétique femelle envers la testostérone injectée. En général, ce sont les tissus qui réagissent au facteur mâle chez la femelle free-martin, dans le phénomène du virilisme et dans l'édification normale du sexe mâle.

Le mécanisme dans l'édification des organes mâles est-il le même dans tous ces cas; est-il fonction de composés chimiques, d'abord élaborés à l'intérieur des cellules, leur impliquant des affinités et des tropismes particuliers et qui, ensuite déchargés par les cellules, induisent, par contiguïté et à distance, des réactions, sexuellement polarisées, dans les ébauches spéciales.

Deux faits semblent s'opposer à cette manière de voir :

1° Jamais une inversion de la gonade génétique femelle en testicule n'a été obtenue, à la suite de testostérinisation; la femelle masculinisée par la testostérone, à côté d'un complexus d'organes mâles et de son comportement mâle, possède néanmoins des ovaires et non pas des testicules; de plus, elle se montre incapable d'édifier une glande interstitielle mâle. Or, dans la plupart des free-martins, les gonades acquièrent une orientation structurale mâle, les cordons médullaires s'étant transformés en cordons et en canalicules sexuels, toutefois stériles, et contenant, entre les canalicules, des cellules incrétoires. Il est rare, au contraire, qu'on ait trouvé, dans de telles gonades, des îlots de substance corticale ovarienne (Kaufmann et Magnussen, Bissonette, Willier);

2° D'autre part, l'embryon femelle testostérinisé accomplit, d'une manière très parfaite, ce que la sœur jumelle dans les free-martins manque à réaliser, sous l'influence des hormones de son frère : seul l'embryon femelle testostérinisé édifie un pénis à sculpture normale, alors que la femelle free-martin présente des organes sexuels externes femelles peu modifiés. Par contre, les trompes de Fallope et l'utérus régressent fortement chez le free-martin et se trouvent bien développés dans la femelle testostérinisée.

Or tout le syndrôme, évoqué dans l'organisme femelle par la testostérone, présente des analogies remarquables avec les effets que produisent des anomalies dans le fonctionnement de la glande surrénale, associées fréquemment à des tumeurs, et connus sous le nom de *virilisme*. Ainsi le cas de Fiebiger correspond à la femelle testostérinisée récemment décrite [1].

Comment accorder entre elles les différences dans l'histogenèse d'une femelle free-martin, d'une femelle testostérinisée et d'une femelle virilisée? Dans la femelle free-martin, l'inversion sexuelle des gonades, ne serait-elle pas due à la *précocité* des influences masculinisantes déployées, qui manque dans nos expériences? Ceci est très probable. Mais alors, pourquoi cette

(1) *C. R. Soc. Biol.*, 127, 1938, p. 674 et 1255.

femelle manque-t-elle à édifier les organes génitaux externes mâles, alors que ces mêmes organes, chez son frère, subissent une orientation mâle normale et que la testostérinisation se montre capable d'induire leur édification dans tout embryon femelle normal ?

L'inversion sexuelle de la gonade chez la femelle *free-martin* doit, en effet, dépendre d'une *action très précoce* du facteur mâle. Dans l'embryon femelle *testostérinisé* et dans le phénomène de *virilisme*, le facteur mâle n'a plus d'effet sur les corrélations germino-somatiques déjà établies dans l'ovaire. *L'impuissance de la femelle free-martin à édifier un pénis* dépendrait-elle de la constitution spéciale de ses tissus, à déterminisme génétique femelle ? Pas en principe, du moment que la femelle génétique testostérinisée est capable de l'édifier. *Le facteur mâle*, transmis par le frère jumeau, se montre *insuffisant pour produire, dans des tissus à déterminisme femelle, les effets qu'il accomplit dans ses propres tissus à déterminisme mâle*. Ce facteur est moins fort que la testostérone en excès, qui, introduite dans une femelle génétique, réussit à induire des organes génitaux externes mâles.

Reste à savoir si les substrats tissulaires particuliers réagissent, dans le virilisme *consécutif à l'hyperplasie corticale de la surrénale* et dans *la testostérinisation expérimentale* à deux corps chimiques différents ou bien à un seul ? La testostérone, que j'injecte dans l'embryon, est-elle transformée chez lui en un produit, identique à celui élaboré dans le cortex de la surrénale, ou inversement; les produits incrétoires de la surrénale, lorsqu'ils agissent d'une manière masculinisante, ont-ils été transformés en testostérone ?

Or il est très probable que la glande interstitielle du testicule a la même origine que le tissu cortical de la glande surrénale, et qu'elle se développe plus particulièrement aux dépens d'îlots segrégés par l'épithélium cœlomique, retardés dans leur migration, puis emprisonnés dans l'ébauche gonadique par les tissus qui s'y organisent [2]. De nouvelles expériences de traitement de l'embryon, avec des extraits effectifs de la substance corticale, établiront peut-être une similitude dans leur fonction.

---

(2) *Comptes rendus*, **200**, 1935, p. 1632.

BACTÉRIOLOGIE. — *De l'influence de certaines vitamines hydrosolubles sur la vitesse de croissance de diverses bactéries cocciformes.* Note de MM. **Auguste Sartory**, **René Sartory** et **Jacques Meyer**.

Continuant nos travaux sur les facteurs activant la croissance des microorganismes [1], nous avons essayé tout d'abord de mettre au point des méthodes de numération des bactéries permettant de contrôler avec le maximum de précision et de constance le poids des récoltes et la vitesse de prolifération des germes microbiens. Nos essais ont été effectués à l'aide de différentes Sarcines. Les méthodes de dosage choisies pour les expériences que nous rapportons ici ont été les suivantes : 1° la méthode optique néphélométrique au moyen de la cellule photoélectrique; 2° la méthode volumétrique de centrifugation à l'aide de tube capillaire gradué de Rosenthal [2].

Nous avons été au cours de notre expérimentation obligés de modifier la technique initiale de Rosenthal et nous donnerons dans un travail ultérieur les détails de ces méthodes.

Nous avons employé un milieu de culture peptoné, glucosé toujours identique. Pour toutes nos recherches nous avons utilisé des mêmes concentrations à doses croissantes en vitamines. Nos premières expériences ont eu comme objet d'étudier l'action de la vitamine B_1, de la vitamine B_2 et de la vitamine C, incorporé séparément dans le bouillon à la dose de

$$0^{\gamma},005,\ 0^{\gamma},05,\ 0^{\gamma},5 \text{ et } 5^{\gamma} \text{ pour } 1^{cm^3} \text{ de bouillon.}$$

La vitesse de prolifération des bactéries et l'activation de la croissance par les vitamines ont été périodiquement examinées par rapport au temps de culture de 24,48 et 72 heures, de sorte que chaque expérience comportait l'examen de 20 tubes ensemencés.

L'ensemencement se pratiquait toujours au moyen d'une culture mère préparée avec des soins particuliers pour avoir la garantie que le poids et le nombre des germes initialement introduits dans les milieux vitaminés restaient constamment semblables.

Cette culture mère était toujours préparée de la façon suivante :

---

(1) A. et R. Sartory et J. Meyer, *Bull. Acad. Méd.*, **114**, 1935, p. 134; A. et R. Sartory, J. Meyer et J. Merglen, *Comptes rendus*, **203**, 1936, p. 280.

(2) S. Rosenthal, *Berl. Klin. Wochenschr.*, 1913, p. 334.

1° la souche initiale est cultivée sur bouillon gélosé;

2° 10$^{cm^3}$ de bouillon synthétique sont ensemencés à l'aide d'une oese de bactéries prélevée sur la culture gélosée. On fait cultiver à + 37° pendant 24 heures;

3° 0$^{cm^3}$,5 de l'émulsion culturale ainsi obtenue sont réensemencés sur 10$^{cm^3}$ de bouillon stérile; on fait cultiver à + 37° pendant 48 heures;

4° 1$^{cm^3}$ de cette émulsion bactérienne est encore reporté dans 10$^{cm^3}$ de bouillon frais;

5° cette suspension bactérienne bien émulsionnée nous servait pour ensemencer nos milieux témoins et vitaminés en expérience à raison de 0$^{cm^3}$,1 pour 10$^{cm^3}$ de milieu.

Nous rapportons dans le tableau suivant nos résultats obtenus au moyen des deux méthodes en exprimant les valeurs numériques par rapport au témoin considéré comme unité en pour 100.

Expériences au moyen de Sarcina flava.

	Résultats néphélométriques.				Résultats volumétriques.			
Quantité de vitamines.......	5γ.	0γ,5.	0γ,05.	0γ,005.	5γ.	0γ,5.	0γ,05.	0γ,005
	Vitamine B_1.							
Activation de croissance (en %) :								
Après 24 heures...........	9,02	14,15	11,56	14,15	12,50	12,50	12,50	12,50
» 48 »	12,85	17,88	22,85	18,57	13,15	15,78	23,68	15,78
» 72 »	8,07	11,65	13,45	8,50	10,93	10,93	14,06	10,93
	Vitamines B_2.							
Après 24 heures...........	3,33	6,66	11,73	6,66	14,28	14,28	20,00	14,28
» 48 »	10,61	13,23	17,69	15,92	13,33	13,33	20,00	15,33
» 72 »	6,65	8,43	13,25	12,67	7,14	8,92	14,28	12,50
	Vitamines C.							
Après 24 heures...........	1,48	5,92	3,67	4,44	6,25	9,25	9,25	6,25
» 48 »	8,79	12,08	20,87	16,48	8,33	12,12	21,21	15,13
» 72 »	4,14	6,20	10,35	7,46	5,45	5,45	10,46	7,29

Des résultats à peu près semblables ont été obtenus au moyen d'autres espèces de Sarcines dans un grand nombre d'expériences.

Nous nous croyons en droit de tirer les conclusions suivantes de ces recherches :

Au moyen des deux méthodes, nous constatons un optimum d'activation exercé par chacune des trois vitamines employées dans les cultures âgées

de 48 heures et pour une concentration de 0$^{\gamma}$,05 de vitamine par centimètre cube de milieu.

Des expériences semblables effectuées au moyen d'un apport initial de germes microbiens dans le milieu nutritif (ensemencement avec 0$^{cm^3}$,2, 0$^{cm^3}$,4 etc. de culture mère pour 10$^{cm^3}$ de milieu), nous ont montré un changement de l'optimum d'activation de croissance microbienne par rapport à la concentration en vitamine hétérogène du milieu.

Nous avons donc mis en évidence un optimum d'activation de croissance dans les cultures âgées de 48 heures pour une concentration de 0$^{\gamma}$,05 de vitamine B_1, B_2, ou C par centimètre cube de milieu et en ensemençant 0$^{cm^3}$,1 de culture mère sur bouillon.

La vitesse de prolifération des bactéries semble donc en relation directe avec le rapport b/c où b est égal au poids des germes initialement ensemencés et c est égal à la concentration initiale en vitamine hétérogène du milieu.

Pour ce qui concerne les méthodes employées, nous arrivons aux conclusions suivantes :

La méthode optique néphélométrique au moyen de la cellule photoélectrique est suffisamment précise et de manipulation rapide et facile. Les différences moyennes entre des essais identiques du contrôle varient de 2,05 pour 100 à 2,29 pour 100.

La méthode volumétrique de Rosenthal au moyen de tube capillaire de centrifugation est peu recommandable. Les causes d'erreurs techniques et l'influence des facteurs physiques sur les résultats sont trop prononcés. Les écarts moyens entre des expériences semblables varient jusqu'à 6 et 7,5 pour 100.

En consultant notre tableau, les résultats présentent des écarts dépassant encore largement ce taux, si l'on compare les valeurs pour la vitamine B_2 et C, de la méthode de Rosenthal et ceux de méthode néphélométrique.

IMMUNOCHIMIE. — *Sur la nature chimique et sur les propriétés biologiques de l'antigène* Vi *du bacille typhique*. Note (¹) de M. **André Boivin** et Mme **Lydia Mesrobeanu**, présentée par M. Louis Martin.

Appelons (O), (Vi) et (O + Vi) les souches de bacille typhique qui contiennent soit l'antigène somatique O classique, soit l'antigène Vi, ou antigène de virulence de *Felix*, soit tous les deux.

(¹) Séance du 25 avril 1938.

En 1934 ([2]), nous avons découvert la nature glucido-lipidique de l'antigène O du typhique. Depuis, les trois méthodes actuellement connues pour la préparation des antigènes glucido-lipidiques ont permis d'extraire du b. typhique aussi bien l'antigène Vi que l'antigène O : méthode à la trypsine ([3]), méthode à l'acide trichloracétique ([4]) et méthode au diéthylène-glycol ([5]). Il restait à préciser la nature chimique de l'antigène Vi, tâche à laquelle nous nous sommes employés, en travaillant parallèlement sur trois souches de b. d'Eberth : une souche (O), la souche O-901 bien connue; une souche (Vi), la souche Ty. 441, variante 6-S; une souche (O + Vi), la souche Ty. 2 ([6]).

Par notre méthode à l'acide trichloracétique, nous avons pu obtenir deux antigènes glucido-lipidiques provenant respectivement de (O) et de (Vi) et se séparant par certaines différences dans leurs propriétés chimiques et biologiques. Il s'agit, dans les deux cas, de substances colloïdales, donnant des solutions aqueuses opalescentes. A l'hydrolyse chlorhydrique, l'antigène de (O) libère, en moyenne, 46,1 pour 100 de sucres réducteurs et 27,2 pour 100 d'acides gras, alors que l'antigène de (Vi) libère 21,7 pour 100 de sucres et 26,5 pour 100 d'acides gras. Le premier ne précipite pas par l'acétate d'uranyle, alors que le second donne, avec ce réactif, un précipité soluble dans l'acide citrique. Ces deux antigènes glucido-lipidiques sont toxiques pour la souris, mais inégalement : le premier tue l'animal à la dose minimum de 0,05 à $0^{mg},10$ (péritoine) alors qu'il faut 0,30 à $0^{mg},50$ du second pour atteindre le même but ([7]). Les deux antigènes sont absolument distincts par leur spécificité, chacun d'eux ne précipitant que par le sérum antibactérien homologue. Injectés en doses répétées dans la veine du lapin, ces deux substances glucido-lipidiques sont

---

([2]) A. Boivin, I. et L. Mesrobeanu et B. Nestorescu, *C. R. Soc. Biol.*, 115, 1934, p. 306.

([3]) W. W. C. Topley, H. Raistrick, J. Wilson, M. Stacey, S. W. Chalinor et R. O. J. Clark, *Lancet*, 232, 1937, p. 252.

([4]) A. Giovanardi, *Boll. Sez. Ital. Soc. intern. Microbiol.*, 9, 1937, p. 130, et D. et C. Combiesco et E. Soru, *C. R. Soc. Biol.*, 126, 1937, p. 1081.

([5]) D. W. Henderson et W. T. J. Morgan, *Brit. Journ. Exp. Path.*, 19, 1938, p. 82.

([6]) M. Felix (Lister Institute de Londres) a bien voulu nous donner ses souches Ty. 441, variante 6-S et Ty. 2 et nous en préciser le comportement sérologique exact.

([7]) Henderson et Morgan [voir note ([5])] obtiennent à partir de (Vi) des préparations antigéniques mais pratiquement non toxiques pour la souris (les animaux supportent en général 5^{mg} dans la veine). Il est probable, comme inclinent à le penser les auteurs, pour d'autres raisons du reste (voir leur Mémoire, p. 93), que la longue et complexe méthode au diéthylène-glycol altère, dans une certaine mesure, le fragile antigène Vi.

antigéniques. L'anticorps qui se forme en réponse à l'injection de l'antigène de (O) précipite cet antigène mais ne précipite pas l'antigène de (Vi); il agglutine la souche (O); il n'agglutine pas la souche (O + Vi) vivante, mais agglutine cette même souche lorsque les bactéries ont été tuées par chauffage. Un tel pouvoir agglutinant caractérise l'anticorps O des immunologistes. L'anticorps qui se forme en réponse à l'injection de l'antigène de (Vi) précipite seulement l'antigène homologue; il n'agglutine pas la souche (O); il agglutine la souche (O + Vi) quand les bactéries sont vivantes, mais ne l'agglutine plus après chauffage. A ce pouvoir agglutinant, on reconnaît l'anticorps Vi des immunologistes. L'antigène O et l'antigène Vi du b. typhique sont donc tous deux de nature glucido-lipidique, mais ils se différencient complètement par leur spécificité sérologique.

La même méthode, appliquée à la souche (O + Vi), conduit à un extrait trichloracétique précipitant à la fois par l'anticorps O et par l'anticorps Vi. Par adjonction d'uranyle à cet extrait, un précipité se forme, surnagé par un liquide demeurant opalescent. Ce liquide, débarrassé d'uranyle par dialyse, se révèle à la précipitation sérologique comme renfermant seulement de l'antigène O. Le précipité uranylique, redissous dans l'acide citrique, puis soumis à la dialyse, se montre comme étant constitué par un mélange d'antigène Vi et d'antigène O, ce dernier s'étant sans doute adsorbé sur le complexe uranylique insoluble d'antigène Vi. En répétant plusieurs fois la précipitation par l'uranyle, on parvient à éliminer la majeure partie de l'antigène O, en conservant tout l'antigène Vi. On peut conclure que la souche (O + Vi) renferme, en mélange, les deux antigènes glucido-lipidiques O et Vi, séparables par voie chimique, grâce à l'uranyle. Par sa toxicité, l'antigène Vi vient s'ajouter à l'antigène O pour constituer l'endotoxine des souches (O + Vi) qui sont, comme on le sait, les seules souches virulentes de bacille d'Eberth.

A $16^{h}20^{m}$ l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 17^{h}.

E. P.

ERRATA.

—

(Séance du 14 mars 1938.)

Note de M. *Frantz Perrier*, Détermination des longueurs d'onde du rayonnement émis par les isolants électrisés : essai d'interprétation théorique :

Page 831, après la ligne 23 du texte : « sont les mêmes. » continuer page 832, ligne 18 « J'ai indiqué antérieurement..... » et lire jusqu'à la fin de la Note.

Reprendre ensuite page 831, ligne 24 « 3. Nous pouvons d'ailleurs..... » et lire ainsi jusqu'à la ligne 17 de la page 832 où s'achève la Note.

(Séance du 28 mars 1938.)

Note de M. *Aryeh Dvoretzky*, Les abscisses d'holomorphie et de méromorphie des fonctions analytiques représentées par des séries de Dirichlet :

Page 970, ligne 11, *au lieu de* sur la droite $\sigma = \mathcal{H}_n$, *lire* dans toute bande $\mathcal{H}_n - \varepsilon < \sigma \leq \mathcal{H}_n$.

Page 970, ligne 10, en remontant, *au lieu de* $\sigma \geq \mathcal{H}_n$, *lire* $\sigma \geq \mathcal{H}_n - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ arbitrairement petit).

Page 970, ligne 9, en remontant, *au lieu de* $\sigma < \mathcal{H}_\infty$, *lire* $\sigma > \mathcal{H}_\infty$.

Page 970, formule (3), *au lieu de*

$$\mathcal{H}_1 = \lim_{0 < h \to \infty} \left[h - \frac{1}{e} \limsup_{m \to \infty} \frac{1}{m} \left| \sqrt[m]{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu^m e^{-\lambda_\nu h}} \right| \right],$$

lire

$$\mathcal{H}_1 = \lim_{0 < h \to \infty} \left[h - \frac{1}{e \limsup\limits_{m \to \infty} \frac{1}{m} \left| \sqrt[m]{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \lambda_\nu^m e^{-\lambda_\nu h}} \right|} \right].$$

(Séance du 11 avril 1938.)

Note de MM. *Roger Servant* et *Belling Tsaï*, Appareil à lecture directe pour la mesure des champs magnétiques :

Page 1172, note (1), *au lieu de* Séance du 21 février, *lire* Séance du 28 mars 1938.

Note de MM. *Paul Ancel* et *Paul Wintemberger*, Sur le déterminisme de la symétrie bilatérale dans l'œuf des Vertébrés :

Page 1196, ligne 3, *au lieu de* Wintemberger, *lire* Vintemberger.

(Séance du 25 avril 1938.)

Note de M. *Christian Pauc*, Unification des processus générateurs des divers contingents et paratingents :

Page 1244, remplacer les lignes 4 et 5 par les suivantes :

Kuratowski (7), nous pouvons seulement affirmer, pour A ouvert dans $\mathcal{S}$, qu'elle est de la quatrième classe de Lusin (8).

(Séance du 2 mai 1938.)

Note de M. *Théodore Kahan*, La barrière de potentiel en mécanique nucléaire et les dimensions nucléaires des corps radioactifs lourds :

Page 1291, ligne 6, *au lieu de* ($\sim$ 7 à 8 MeV), *lire* intranucléaires ; ligne 8, *au lieu de* ($\sim$ 9 MeV), *lire* ($\sim$ 30 MeV).